行列の Jordan 標準化 “ノート”

上久保　智博

2009 年 7 月 21 日 16:30 改訂

概要

「線形代数学」の教科書における「行列の Jordan(ジョルダン) 標準化」に関する記述には, (数学的には本質的とはいえないものの) 違いがある. また, 「行列の Jordan 標準化」に関する大学入試問題の解法は, 統一的なものとなっていない. この “ノート” は, こうした事情を踏まえ, 「行列の Jordan 標準化」について, 大学入試問題を例に入れながら, できるだけ統一的な視点に立ち, 高校・大学一般教養のつながりを意識しながら作成したものである.

目次

第 1 章　はじめに

「線形代数学」の教科書における,「行列の Jordan 標準化」に関する記述について, 文献によって, 定義や計算法の違いがある. その違いについていくつか述べたい.

はじめに, 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ を $\det(\lambda E - A)$ と定義するか, $\det(A - \lambda E)$ と定義するかの違いが見られる. また, 対角化可能な n 次行列 A を対角化する変換行列を求めるにあたって, 行列の固有ベクトルが n 本必要になるが, 行列 A の固有値 λ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めるにあたって, $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ を求めるか, $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ を求めるかの違いも見られる. さらに, 対角化可能でない n 次行列を Jordan 標準化する変換行列を求めるにあたっても, 行列の広義固有ベクトルが n 本必要になるが, 行列の固有値に対する (広義) 固有ベクトルを求めるにあたっても, その計算法に違いも見られる. これとは別に, 対角化する変換行列の計算法と Jordan 標準化する変換行列の計算法が統一的に書かれていない文献もみられる. ただ, こうした記述の違いは, 数学的には本質的な違いであるとはいえないが, 固有多項式の定義と (広義) 固有ベクトルの求め方に現れる行列 $\lambda E - A$ または $A - \lambda E$ の書き分けを要求するかどうかという点において, 混乱を来さないようにとの配慮から来ている部分もあるのは事実である.

また, 行列の Jordan 標準化に関する大学入試問題について, 対角化可能な行列の場合と対角化不可能だが Jordan 標準化可能な行列の場合で, 問題集などの解答をみると, とるべき解法に大きな違いがあることがわかる.

以上のような,「線形代数学」の教科書における記述の違いがあることや, 行列の標準化に関する大学入試問題の解法が統一的なものとなっていないことから,「行列の Jordan 標準化」について, 大学入試問題を例に入れながら, できるだけ統一的な視点に立ち, 高校・大学一般教養のつながりを意識しながら, “ノート” を作成した. 第 2 章では, 行列の Jordan 標準化について, 最小限の内容を平易に整理し, まとめた. 主に守安, 小野 [8], 平岡, 堀 [2], 長岡 [9] に依るところが大きい. 第 3 章では, これをふまえて, 行列の n 乗計算についての大学入試問題に適用させてみた.

謝辞

本稿を執筆するにあたって, 長野県上田高等学校の数学科の先生方には, 多くの有益な助言を与えて下さったことを心より感謝いたします.

第 2 章　行列の Jordan 標準化

2.1　行列式と逆行列

本節では, 標記の事項について, 必要最小限のものについてまとめる. また, 命題の証明は省略する. ちなみに, 3 次以上の行列を扱う際に, 行列式の概念を持ち出さない限り, 本節の内容については, 参考程度にとどめてもいいかもしれない. しかし, この考え方に立つならば, 与えられた行列の逆行列を求めるにあたって, 連立方程式を解けば, 求められないことはないのだが, 行列の次数が大きくなるにつれて, その元数が多くなり, 飛躍的に困難な度合いが増してしまうので, 本節の内容については是非知っておくとよい.

定義 2.1 (行列式の定義) 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ に対して, A の行列式を $\det A$ と書き, これを次で (n に関して帰納的に) 定義する.

$$\det A = \begin{cases} a_{11} & (n = 1) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \det A_{1k} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \Delta_{1k} & (n \geqq 2) \end{cases} \tag{2.1.1}$$

ここで, A_{ij} は, A の i 行目と j 列目を取り除いた $(n-1)$ 次複素行列であり, $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ を A の余因子と呼ぶ. ∎

例 2.2 $A = (a) \in M_1(\mathbb{C})$ のとき, $\det A = a$

∎

例 2.3 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ のとき, $\det A = a_{11} \det(a_{22}) - a_{12} \det(a_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

∎

例 2.4 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ のとき,

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

∎

注意 2.5 通常, 行列式の定義を行うには, 置換の概念を用いるのが通例ではあるが, 高等学校の段階では未習である (ただし, 進学校の高校生にとって, 難易度の高い概念というわけではない). このことから, あえて, 多くの数学書でとられている方法で, 行列式の定義を行わなかった. たとえば, 齋藤毅 [12], 竹野 [18] では定義 2.1 のように帰納的に行列式を定義している. ただ, 行列式の性質 (たとえば, 命題 2.6〜2.9 など) の証明を行うということから考えると, 置換の概念を用いて, 行列式を定義したほうが有利である. なお, 偶然にも本稿の作成にあたり, 文献検索をしていた際に, これらの命題の証明が竹野 [18] にあることがわかった. 証明を知りたい方はこれを参照されたい. ∎

命題 2.6

$$\det A = \det({}^t A) \tag{2.1.2}$$

が成り立つ. ∎

命題 2.7 $n \geqq 2$ のとき,

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\Delta_{kj} \quad (1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq n) \tag{2.1.3}$$

が成り立つ. ∎

命題 2.8 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ に対して, 次は同値である.

1) $\det A \neq 0$

2) A を構成する n 本の列ベクトル $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ は 1 次独立である.

3) A を構成する n 本の行ベクトル $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. ∎

当然ではあるが, 命題 2.8 の対偶も成り立つ.

命題 2.9 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ に対して, 次は同値である.

1) $\det A = 0$

2) A を構成する n 本の列ベクトル $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ は 1 次従属である.

3) A を構成する n 本の行ベクトル $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ は 1 次従属である. ∎

A の逆行列を考えるために, 必要である余因子行列を定義する.

定義 2.10 (余因子行列の定義) $A \in M_n(\mathbb{C})$ の余因子行列 $\widetilde{A} \in M_n(\mathbb{C})$ を

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.1.4}$$

と定義する. ∎

ここで, $A \in M_n(\mathbb{C})$ とし,

$$\widetilde{A}A = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.1.5}$$

について考える.

行列の積の定義から, 対角成分については, まず, b_{11} を計算してみると,

$$b_{11} = \sum_{k=1}^{n} a_{k1}\Delta_{k1} = \det A$$

が得られる. 同様に, 他の対角成分に対しても,

$$\begin{aligned} b_{22} &= \sum_{k=1}^{n} a_{k2}\Delta_{k2} = \det A \\ b_{33} &= \sum_{k=1}^{n} a_{k3}\Delta_{k3} = \det A \\ &\vdots \\ b_{nn} &= \sum_{k=1}^{n} a_{kn}\Delta_{kn} = \det A \end{aligned}$$

も得られる. ところが, 非対角成分については, ためしに, b_{21} を計算してみると,

$$b_{21} = \sum_{k=1}^{n} a_{k1}\Delta_{k2} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

が, 命題 2.9 から得られる. これは他の非対角成分を考えた場合も, 結果は同様である.

よって, このことをまとめると,

$$\widetilde{A}A = \begin{pmatrix} \det A & & & \text{\huge 0} \\ & \det A & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \det A \end{pmatrix} = (\det A)E \tag{2.1.6}$$

であるから, $\det A \neq 0$ ならば, $\left(\dfrac{1}{\det A}\widetilde{A}\right)A = E$ となることがわかる. 同様に, $A\left(\dfrac{1}{\det A}\widetilde{A}\right) = E$ であることもわかる. よって, $A \in GL_n(\mathbb{C})$ の逆行列 A^{-1} が $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\widetilde{A}$ と書き下せることがわかる.

2.2 行列の固有値・固有ベクトル

本節では, 行列の固有値・固有ベクトルについて述べる.

定義 2.11 (行列の固有値・固有ベクトルの定義) 与えられた行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ が存在するとき, このような $\lambda \in \mathbb{C}$ を, A の固有値と呼ぶ. また, このような $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ を, A の固有値 λ に属する固有ベクトルと呼ぶ.

補題 2.12 $\lambda \in \mathbb{C}$ が $A \in M_n(\mathbb{C})$ の固有値であるための必要十分条件は, $\det(A-\lambda E)=0$ となることである. 特に, A の固有値は, 重複度を考慮に入れて n 個ある.

証明

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \Longleftrightarrow (A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \tag{2.2.1}$$

となることに注意すれば, $\lambda \in \mathbb{C}$ が A の固有値であるということは, (2.2.1) を $\boldsymbol{x}$ についての連立 1 次方程式とみなしたときに, $\boldsymbol{o}$ 以外の解を持つということと同値である. よって, λ は α についての n 次方程式 $\det(A-\alpha E)=0$ の解であるから, 代数学の基本定理より, 重複度を考慮に入れて n 個あることがわかる. ∎

ここで, $\det(A-\alpha E)$ を展開すると, $\det(A-\alpha E)$ は

$$\det(A-\alpha E) = (-1)^n\alpha^n + (-1)^{n-1}(\mathrm{tr}A)\alpha^{n-1} + \cdots + \det A \tag{2.2.2}$$

と表される α の n 次式であり, 係数は A の成分によって定まる. ただ, 最高次の係数が $(-1)^n$ であるということは, n の偶奇によって係数が変わってしまい, 扱いが面倒なので, この n 次式を $(-1)^n$ 倍した $\det(\alpha E - A)$ を考えるとよい. そこで, 次のように, 行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ の固有多項式を定義する.

定義 2.13 (行列の固有多項式の定義・固有方程式) 行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ の固有多項式を $\Phi_A(\alpha)$ と書き, これを次で定義する.

$$\Phi_A(\alpha) = \det(\alpha A - E) = \alpha^n - (\mathrm{tr}A)\alpha^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A \tag{2.2.3}$$

また, α についての n 次方程式 $\Phi_A(\alpha)=0$ を, 行列 A の**固有方程式**という. ∎

注意 2.14 ちなみに, A の固有値の定義より, $\Phi_A(\alpha)=0$ の解は A の固有値である.

2.2.1 2 次行列における固有値・固有ベクトルの計算例

例 2.15 (固有値・固有ベクトルの計算 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めたい.

まず, A の固有値を求める. A の固有多項式 $\Phi_A(\alpha)$ は

$$\Phi_A(\alpha) = \det\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 6 & \alpha-5 \end{pmatrix} = \alpha(\alpha-5)-(-1)\cdot 6 = \alpha^2 - 5\alpha + 6 = (\alpha-2)(\alpha-3)$$

であるから, A の固有値は 2 または 3 である.

次に, A の固有値 2 に属する固有ベクトルを求める.

$$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.4}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 1 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (\neq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}_1$ とする). (2.2.4) より,

$$\left\{ \begin{array}{l} -2x + y = 0 \qquad (2.2.5) \\ 6x - 3y = 0 \qquad (2.2.6) \end{array} \right.$$

が得られる. (2.2.4) を 3 倍すると, (2.2.5) が得られるから, 本質的には (2.2.4) の 1 本しか方程式がないと思える. (2.2.4) より, $y=2x$ を得る. よって, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(s \neq 0)$ が得られるから, たとえば, $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ととれる.

最後に, A の固有値 3 に属する固有ベクトルを求める.

$$(A-3E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.7}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 1 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (\neq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}_2$ とする). (2.2.7) より,

$$\begin{cases} -3x + \ \ y = 0 & (2.2.8) \\ -6x + 2y = 0 & (2.2.9) \end{cases}$$

が得られる. (2.2.8) を 3 倍すると, (2.2.9) が得られるから, 本質的には (2.2.8) の 1 本しか方程式がないと思える. (2.2.8) より, $y = 3x$ を得る. よって, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(s \neq 0)$ が得られるから, たとえば, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ととれる. ∎

例 2.16 (固有値・固有ベクトルの計算 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めたい.

まず, A の固有値を求める. A の固有多項式 $\Phi_A(\alpha)$ は

$$\Phi_A(\alpha) = \det\begin{pmatrix} \alpha-1 & -1 \\ 1 & \alpha-3 \end{pmatrix} = (\alpha-1)(\alpha-3) - 1\cdot(-1) = \alpha^2 - 4\alpha + 4 = (\alpha-2)^2$$

であるから, A の固有値は 2 (2 重解) である.

次に, A の固有値 2 に属する固有ベクトルを求める.

$$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.10}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 1 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (\neq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}$ とする). (2.2.10) より,

$$\begin{cases} -x + y = 0 & (2.2.11) \\ -x + y = 0 & (2.2.12) \end{cases}$$

が得られる. (2.2.11) と (2.2.12) は同一の式なので, 本質的には (2.2.11) の 1 本しか方程式がないと思える. (2.2.11) より, $y = x$ を得る. よって, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s \neq 0)$ が得られるから, たとえば, $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる. ∎

例 2.17 (固有値・固有ベクトルの計算 3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めたい.

まず, A の固有値を求める. A の固有多項式 $\Phi_A(\alpha)$ は

$$\Phi_A(\alpha) = \det\begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 \\ 0 & \alpha-2 \end{pmatrix} = (\alpha-2)^2 - 0\cdot 0 = (\alpha-2)^2$$

であるから, A の固有値は 2 (2 重解) である.

次に, A の固有値 2 に属する固有ベクトルを求める.

$$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.13}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 2 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (\neq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ とする). (2.2.13) より, x, y は $|x|^2 + |y|^2 \neq 0$ を満たす, 任意の複素数である. よって, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(|s|^2 + |t|^2 \neq 0)$ が得られるから, たとえば, $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる. ∎

2.2.2 3 次行列における固有値・固有ベクトルの計算例

例 2.18 (固有値・固有ベクトルの計算 4) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めたい.

まず, A の固有値を求める. A の固有多項式 $\Phi_A(\alpha)$ は

$$
\begin{aligned}
\Phi_A(\alpha) &= \det\begin{pmatrix} \alpha+2 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha-1 & 2 \\ -2 & 2 & \alpha-1 \end{pmatrix} \\
&= (\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-1) + 1\cdot 2\cdot(-2) + 1\cdot 2\cdot 2 \\
&\quad - (\alpha+2)\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 2\cdot(\alpha-1) - 1\cdot(\alpha-1)\cdot(-2) \\
&= \alpha^3 - 7\alpha - 6 = (\alpha+2)(\alpha+1)(\alpha-3)
\end{aligned}
$$

であるから, A の固有値は -2 または -1 または 3 である.

次に, A の固有値 -2 に属する固有ベクトルを求める.

$$
(A+2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.14}
$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 1 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (\neq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}_1$ とする). (2.2.14) より,

$$
\left\{
\begin{aligned}
-\ y -\ z &= 0 && (2.2.15) \\
-2x + 3y - 2z &= 0 && (2.2.16) \\
2x - 2y + 3z &= 0 && (2.2.17)
\end{aligned}
\right.
$$

が得られる. $-$(2.2.16) $-$ (2.2.17) より, (2.2.15) を得る. よって本質的には (2.2.15) と (2.2.17) の 2 本しか方程式がないと思える. (2.2.15), (2.2.17) より,

$$
\left\{
\begin{aligned}
y &= -\ z && (2.2.18) \\
2x - 2y &= -3z && (2.2.19)
\end{aligned}
\right.
$$

が得られる. (2.2.18), (2.2.19) より, $x = -\dfrac{5}{2}z$, $y = -z$ を得る. よって, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(s \neq 0)$ が得られるから, たとえば, $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ととれる.

次に, A の固有値 -1 に属する固有ベクトルを求める.

$$(A+E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.20}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 1 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (\fallingdotseq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}_2$ とする). (2.2.20) より,

$$\begin{cases} -\ x -\ y -\ z = 0 & (2.2.21) \\ -2x + 2y - 2z = 0 & (2.2.22) \\ \ \ 2x - 2y + 2z = 0 & (2.2.23) \end{cases}$$

が得られる. $(-1) \times$ (2.2.22) より, (2.2.23) を得る. よって本質的には (2.2.21) と (2.2.23) の 2 本しか方程式がないと思える. (2.2.21), (2.2.23) より,

$$\begin{cases} x + y = -z & (2.2.24) \\ x - y = -z & (2.2.25) \end{cases}$$

が得られる. (2.2.24), (2.2.25) より, $x = -z$, $y = 0$ を得る. よって, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s \fallingdotseq 0)$ が得られる

から, たとえば, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる.

最後に, A の固有値 3 に属する固有ベクトルを求める.

$$(A-3E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.26}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 1 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (\fallingdotseq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}_3$ とする). (2.2.26) より,

$$\begin{cases} -5x -\ y -\ z = 0 & (2.2.27) \\ -2x - 2y - 2z = 0 & (2.2.28) \\ \ \ 2x - 2y - 2z = 0 & (2.2.29) \end{cases}$$

が得られる. (2.2.28) $\times \dfrac{3}{2} -$ (2.2.29) より, (2.2.27) を得る. よって本質的には (2.2.27) と (2.2.29) の 2 本しか方程式がないと思える. (2.2.27), (2.2.29) より,

$$\begin{cases} 5x + y = -z & (2.2.30) \\ \ \ x - y = \ \ z & (2.2.31) \end{cases}$$

が得られる. (2.2.30), (2.2.31) より, $x = 0$, $y = -z$ を得る. よって, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s \fallingdotseq 0)$ が得られる

から, たとえば, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる. ∎

例 2.19 (固有値・固有ベクトルの計算 5) $A=\begin{pmatrix}2&3&-2\\-3&14&-7\\-5&19&-9\end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めたい.

まず, A の固有値を求める. A の固有多項式 $\Phi_A(\alpha)$ は

$$\begin{aligned}\Phi_A(\alpha)&=\det\begin{pmatrix}\alpha-2&-3&2\\3&\alpha-14&7\\5&-19&\alpha+9\end{pmatrix}\\&=(\alpha-2)(\alpha-14)(\alpha+9)+(-3)\cdot 7\cdot 5+2\cdot 3\cdot(-19)\\&\quad-(\alpha-2)\cdot 7\cdot(-19)-(-3)\cdot 3\cdot(\alpha+9)-2\cdot(\alpha-14)\cdot 5\\&=\alpha^3-7\alpha^2+16\alpha-12=(\alpha-2)^2(\alpha-3)\end{aligned}$$

であるから, A の固有値は 2 (2 重解) または 3 である.

次に, A の固有値 2 に属する固有ベクトルを求める.

$$(A-2E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad すなわち\quad\begin{pmatrix}0&3&-2\\-3&12&-7\\-5&19&-11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\tag{2.2.32}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 1 つ) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}(\neq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}_1$ とする). (2.2.32) より,

$$\begin{cases}3y-2z=0 & (2.2.33)\\-3x+12y-7z=0 & (2.2.34)\\-5x+19y-11z=0 & (2.2.35)\end{cases}$$

が得られる. (2.2.33) より, $y=\dfrac{2}{3}z$ を得る. これを (2.2.34) と (2.2.35) に代入すると,

$$\begin{cases}-3x+z=0 & (2.2.36)\\-5x+\dfrac{5}{3}z=0 & (2.2.37)\end{cases}$$

が得られる. (2.2.37) を $\dfrac{3}{5}$ 倍すると, (2.2.36) が得られるから, 本質的には (2.2.36) の 1 本しか方程式がないと思える. (2.2.36) より, $x=\dfrac{1}{3}z$ を得る. よって, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $(s\neq 0)$ が得られるから, たとえば,

$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ととれる.

最後に, A の固有値 3 に属する固有ベクトルを求める.

$$(A-3E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad すなわち\quad\begin{pmatrix}-1&3&-2\\-3&11&-7\\-5&19&-12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\tag{2.2.38}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 1 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (\neq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}_2$ とする). (2.2.38) より,

$$\begin{cases} -\ x + \ 3y - \ 2z = 0 & (2.2.39) \\ -3x + 11y - \ 7z = 0 & (2.2.40) \\ -5x + 19y - 12z = 0 & (2.2.41) \end{cases}$$

が得られる. $\{(2.2.39) + (2.2.41)\} \div 2$ より, (2.2.40) を得る. よって本質的には (2.2.39) と (2.2.41) の 2 本しか方程式がないと思える. (2.2.39), (2.2.41) より,

$$\begin{cases} x - \ 3y = - \ 2z & (2.2.42) \\ 5x - 19y = -12z & (2.2.43) \end{cases}$$

が得られる. (2.2.42), (2.2.43) より, $x = -\dfrac{1}{2}z$, $y = \dfrac{1}{2}z$ を得る. よって, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(s \neq 0)$ が得られるから, たとえば, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ととれる. ∎

例 2.20 (固有値・固有ベクトルの計算 6) $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めたい.

まず, A の固有値を求める. A の固有多項式 $\Phi_A(\alpha)$ は

$$\begin{aligned} \Phi_A(\alpha) &= \det\begin{pmatrix} \alpha-3 & 6 & 2 \\ -1 & \alpha+2 & 1 \\ 2 & -6 & \alpha-3 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha-3) + 6\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot(-1)\cdot(-6) \\ &\quad - (\alpha-3)\cdot 1\cdot(-6) - 6\cdot(-1)\cdot(\alpha-3) - 2\cdot(\alpha+2)\cdot 2 \\ &= \alpha^3 - 4\alpha^2 + 5\alpha - 2 = (\alpha-1)^2(\alpha-2) \end{aligned}$$

であるから, A の固有値は 1 (2 重解) または 2 である.

次に, A の固有値 1 に属する固有ベクトルを求める.

$$(A-E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.44}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 2 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (\neq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ とする). (2.2.44) より,

$$\begin{cases} 2x - 6y - 2z = 0 & (2.2.45) \\ x - 3y - \ z = 0 & (2.2.46) \\ -2x + 6y + 2z = 0 & (2.2.47) \end{cases}$$

が得られる. (2.2.46) を 2 倍すると, (2.2.45) が得られ, (2.2.46) を -2 倍すると, (2.2.47) が得られるから, 本質的には (2.2.46) の 1 本しか方程式がないと思える. (2.2.46) より, $z = x - 3y$ を得る. よって,

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $(|s|^2 + |t|^2 \neq 0)$ が得られるから，たとえば，$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ととれる．

最後に，A の固有値 2 に属する固有ベクトルを求める．

$$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.48}$$

を満たす，列ベクトル (のうちの 1 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $(\neq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}_3$ とする)．(2.2.48) より，

$$\begin{cases} x - 6y - 2z = 0 & (2.2.49) \\ x - 4y - z = 0 & (2.2.50) \\ -2x + 6y + z = 0 & (2.2.51) \end{cases}$$

が得られる．(2.2.49) $-3\times$ (2.2.50) より，(2.2.51) を得る．よって本質的には (2.2.49) と (2.2.50) の 2 本しか方程式がないと思える．(2.2.49), (2.2.50) より，

$$\begin{cases} x - 6y = 2z & (2.2.52) \\ x - 4y = z & (2.2.53) \end{cases}$$

が得られる．(2.2.52), (2.2.53) より，$x = -\frac{1}{2}z$, $y = \frac{1}{2}z$ を得る．よって，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $(s \neq 0)$ が得られるから，たとえば，$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ととれる． ∎

例 2.21 (固有値・固有ベクトルの計算 7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -4 \\ -3 & 14 & -7 \\ -4 & 17 & -8 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めたい．

まず，A の固有値を求める．A の固有多項式 $\Phi_A(\alpha)$ は

$$\begin{aligned} \Phi_A(\alpha) &= \det\begin{pmatrix} \alpha & -7 & 4 \\ 3 & \alpha-14 & 7 \\ 4 & -17 & \alpha+8 \end{pmatrix} \\ &= \alpha(\alpha-14)(\alpha+8) + (-7)\cdot 7\cdot 4 + 4\cdot 3\cdot(-17) \\ &\quad - \alpha\cdot 7\cdot(-17) - (-7)\cdot 3\cdot(\alpha+8) - 4\cdot(\alpha-14)\cdot 4 \\ &= \alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 8 = (\alpha-2)^3 \end{aligned}$$

であるから，A の固有値は 2 (3 重解) である．

次に，A の固有値 2 に属する固有ベクトルを求める．

$$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -2 & 7 & -4 \\ -3 & 12 & -7 \\ -4 & 17 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.54}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 1 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $(\neq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}$ とする). (2.2.54) より,

$$\begin{cases} -2x + \ \ 7y - \ \ 4z = 0 & (2.2.55) \\ -3x + 12y - \ \ 7z = 0 & (2.2.56) \\ -4x + 17y - 10z = 0 & (2.2.57) \end{cases}$$

が得られる. $\{(2.2.55) + (2.2.57)\} \div 2$ より, (2.2.56) を得る. よって本質的には (2.2.55) と (2.2.56) の 2 本しか方程式がないと思える. (2.2.55), (2.2.56) より,

$$\begin{cases} 2x - \ \ 7y = -4z & (2.2.58) \\ 3x - 12y = -7z & (2.2.59) \end{cases}$$

が得られる. (2.2.58), (2.2.59) より, $x = \dfrac{1}{3}z$, $y = \dfrac{2}{3}z$ を得る. よって, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(s \neq 0)$ が得られるから, たとえば, $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ととれる. ∎

例 2.22 (固有値・固有ベクトルの計算 8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めたい.

まず, A の固有値を求める. A の固有多項式 $\Phi_A(\alpha)$ は

$$\begin{aligned} \Phi_A(\alpha) &= \det \begin{pmatrix} \alpha - 1 & -2 & 1 \\ 1 & \alpha - 4 & 1 \\ 1 & -2 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha - 1)(\alpha - 4)(\alpha - 1) + (-2) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-2) \\ &\quad - (\alpha - 1) \cdot 1 \cdot (-2) - (-2) \cdot 1 \cdot (\alpha - 1) - 1 \cdot (\alpha - 4) \cdot 1 \\ &= \alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 8 = (\alpha - 2)^3 \end{aligned}$$

であるから, A の固有値は 2 (3 重解) である.

次に, A の固有値 2 に属する固有ベクトルを求める.

$$(A - 2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2.2.60)$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 2 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $(\neq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ とする). (2.2.60) より,

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 & (2.2.61) \\ -x + 2y - z = 0 & (2.2.62) \\ -x + 2y - z = 0 & (2.2.63) \end{cases}$$

が得られる．(2.2.61) と (2.2.62) と (2.2.63) は同一の式なので, 本質的には (2.2.61) の 1 本しか方程式がないと思える．(2.2.61) より, $z=-x+2y$ を得る．よって, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(|s|^2+|t|^2 \fallingdotseq 0)$ が得られるから, たとえば, $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ととれる． ∎

例 2.23 (固有値・固有ベクトルの計算 9) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めたい．

まず, A の固有値を求める．A の固有多項式 $\Phi_A(\alpha)$ は

$$\begin{aligned}\Phi_A(\alpha) &= \det\begin{pmatrix} \alpha-3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-3 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha-3)(\alpha-3)(\alpha-3)+0\cdot 0\cdot 0+0\cdot 0\cdot 0 \\ &\quad -(\alpha-3)\cdot 0\cdot 0-0\cdot 0\cdot(\alpha-3)-0\cdot(\alpha-3)\cdot 0 \\ &= \alpha^3-9\alpha^2+27\alpha-27=(\alpha-3)^3\end{aligned}$$

であるから, A の固有値は 3 (3 重解) である．

次に, A の固有値 3 に属する固有ベクトルを求める．

$$(A-3E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.64}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 3 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $(\fallingdotseq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ とする)．(2.2.64) より, x, y, z は $|x|^2+|y|^2+|z|^2 \fallingdotseq 0$ を満たす, 任意の複素数である．よって, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(|s|^2+|t|^2+|u|^2 \fallingdotseq 0)$ が得られるから, たとえば, $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる． ∎

2.3 行列の対角化

前節で定義した, 行列の固有値・固有ベクトルの概念を利用して, 対角化可能な行列を対角化する方法を記述することができる．

定義 2.24 $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．A が対角化可能であるとは, ある $P \in GL_n(\mathbb{C})$ が存在して,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{2.3.1}$$

となるときをいう．また, P を A を対角化するための変換行列といい, (2.3.1) の右辺のような行列を対角行列という． ∎

$A \in M_n(\mathbb{C})$ が (2.3.1) のように対角化されているとする．$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}$ とおくと,

$$P(P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{p}_1 & \lambda_2\boldsymbol{p}_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} \tag{2.3.2}$$

となる．一方,

$$P(P^{-1}AP) = AP = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{p}_1 & A\boldsymbol{p}_2 & \cdots & A\boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} \tag{2.3.3}$$

となるから,

$$\begin{cases} A\boldsymbol{p}_1 = \lambda_1\boldsymbol{p}_1 \\ A\boldsymbol{p}_2 = \lambda_2\boldsymbol{p}_2 \\ \qquad \cdots \\ A\boldsymbol{p}_n = \lambda_n\boldsymbol{p}_n \end{cases}$$

を得る．このことから, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ が A の固有値であり, 固有値 $\lambda_j\,(1 \leqq j \leqq n)$ に対する固有ベクトルが $\boldsymbol{p}_j$ であることがわかる．

命題 2.25 行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．このとき, 次は同値である．

1) A は対角化可能である．
2) A が n 個の 1 次独立な固有ベクトルをもつ．
3) A の相異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ の重複度がそれぞれ $n_1, n_2, \cdots, n_k$ $\left(\text{ただし}, \displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} n_\ell = n\right)$ である, すなわち,

$$\Phi_A(\alpha) = (\alpha - \lambda_1)^{n_1}(\alpha - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\alpha - \lambda_k)^{n_k} \quad \left(\lambda_i \neq \lambda_j\,(i \neq j), \sum_{\ell=1}^{k} n_\ell = n\right) \tag{2.3.4}$$

であるとき, 固有値 $\lambda_\ell\,(1 \leqq \ell \leqq k)$ に対する 1 次独立な固有ベクトルが n_ℓ 本とれる． ∎

以下では, 対角化可能な行列を対角化する方法について述べる．

例 2.26 (行列を対角化する方法 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ を対角化した行列および A を対角化するための変換行列を求めたい．

例 2.15 より, A の固有値は 2 または 3 であり, A の固有値 2 に属する固有ベクトルとして, $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, A の固有値 3 に属する固有ベクトルとして, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ととることができる．よって, A を対角化するための変換行列 P として, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ととることができる．ゆえに, P によって A を対角化すると, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる． ∎

例 2.27 (行列を対角化する方法 2) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ を対角化した行列および A を対角化するための変換行列を求めたい.

例 2.18 より, A の固有値は -2 または -1 または 3 であり, A の固有値 -2 に属する固有ベクトルとして, $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, A の固有値 -1 に属する固有ベクトルとして, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, A の固有値 3 に属する固有ベクトルとして, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととることができる. よって, A を対角化するための変換行列 P として, $P = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ととることができる. ゆえに, P によって A を対角化すると, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる. ∎

例 2.28 (行列を対角化する方法 3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ を対角化した行列および A を対角化するための変換行列を求めたい.

例 2.20 より, A の固有値は 1 (2 重解) または 2 であり, A の固有値 1 に属する固有ベクトルとして, $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, A の固有値 2 に属する固有ベクトルとして, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ととることができる. よって, A を対角化するための変換行列 P として, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ととることができる. ゆえに, P によって A を対角化すると, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる. ∎

2.4 行列の固有値・広義固有ベクトル

本節では, 行列の固有値・広義固有ベクトルについて述べる.

定義 2.29 (行列の広義固有ベクトルの定義) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とし, $\lambda \in \mathbb{C}$ を重複度が $m(\leqq n)$ である A の固有値であるとする. このとき, ある自然数 $\ell\,(1 \leqq \ell \leqq m)$ が存在し, $(A - \lambda E)^{\ell-1}\widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{o}$ となる $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ で, 1 次独立なものが高々 $(m-1)$ 本しか存在しないが, $(A - \lambda E)^{\ell}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ で, 1 次独立なものが, ちょうど m 本存在するとき, このような $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ を, A の固有値 λ に属する広義固有ベクトルと呼ぶ.

注意 2.30 定義 2.29 について, $k \in \mathbb{N}$ に対して, $(A - \lambda E)^k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ は $(A - \lambda E)^{k+1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ を満たし

ている．よって，$(A-\lambda E)^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ となる $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\setminus\{\boldsymbol{o}\}$ で，1 次独立なものの本数を $d_k(\leqq m)$ とすると，

$$1\leqq d_1<d_2<d_3<\cdots<d_\ell=d_{\ell+1}=\cdots=m \tag{2.4.1}$$

という関係が成り立っている．これより，固有ベクトルは広義固有ベクトルに内包されていることがわかる．また，$k<\ell$ に対して，$(A-\lambda E)^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ となる $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\setminus\{\boldsymbol{o}\}$ は広義固有ベクトルに内包されていることもわかる．

2.4.1　2 次行列における固有値・広義固有ベクトルの計算例

例 2.31 (固有値・広義固有ベクトルの計算 1) $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}$ の固有値・広義固有ベクトルを求めたい．

例 2.16 より，A の固有値は 2 (2 重解) であり，A の固有値 2 に属する固有ベクトル (のうちの 1 つ) $\widetilde{\boldsymbol{p}}$ として，$\widetilde{\boldsymbol{p}}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ととれる．よって，A の固有値 2 に対する固有ベクトルが 2 本に満たない．

そこで，A の固有値 2 に属する広義固有ベクトルを求めるために，

$$(A-2E)^2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad\text{すなわち}\quad\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{2.4.2}$$

を満たす，列ベクトル (のうちの 2 つ) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}(\fallingdotseq\boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$ とする)．(2.4.2) より，x，y は $|x|^2+|y|^2\fallingdotseq 0$ を満たす，任意の複素数であるから，たとえば，$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ととれる．次に，$\boldsymbol{p}_1$ を $\boldsymbol{p}_1=(A-2E)\boldsymbol{p}_2$ から求めることができる．よって，

$$\boldsymbol{p}_1=(A-2E)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \tag{2.4.3}$$

ととれる． ∎

2.4.2　3 次行列における固有値・広義固有ベクトルの計算例

例 2.32 (固有値・広義固有ベクトルの計算 2) $A=\begin{pmatrix}2&3&-2\\-3&14&-7\\-5&19&-9\end{pmatrix}$ の固有値・広義固有ベクトルを求めたい．

例 2.19 より，A の固有値は 2 (2 重解) または 3 である．

A の固有値 2 に属する固有ベクトル (のうちの 1 つ) $\widetilde{\boldsymbol{p}}$ として，$\widetilde{\boldsymbol{p}}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ととれる．よって，A の固有値 2 に対する固有ベクトルが 2 本に満たない．

そこで，A の固有値 2 に属する広義固有ベクトルを求めるために，

$$(A-2E)^2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\text{すなわち}\quad\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&2&-1\\-2&4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{2.4.4}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 2 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ($\neq \boldsymbol{o}$) を求める (これを $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ とする). (2.4.4) より,

$$\begin{cases} \quad x - 2y + \ \ z = 0 & (2.4.5) \\ -\ \ x + 2y - \ \ z = 0 & (2.4.6) \\ -2x + 4y - 2z = 0 & (2.4.7) \end{cases}$$

が得られる. (2.4.5) を -1 倍すると, (2.4.6) が得られ, (2.4.5) を -2 倍すると, (2.4.7) が得られるから, 本質的には (2.4.5) の 1 本しか方程式がないと思える. (2.4.5) より, $z = -x + 2y$ を得る. よって,
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(|s|^2 + |t|^2 \neq 0)$ が得られるから, たとえば, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ととれる. 次に, $\boldsymbol{p}_1$ を $\boldsymbol{p}_1 = (A - 2E)\boldsymbol{p}_2$ から求めることができる. よって,

$$\boldsymbol{p}_1 = (A - 2E)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 12 & -7 \\ -5 & 19 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{2.4.8}$$

ととれる.

また, A の固有値 3 に属する広義固有ベクトル (のうちの 1 つ) として, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ととれる. ∎

例 2.33 (固有値・広義固有ベクトルの計算 3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -4 \\ -3 & 14 & -7 \\ -4 & 17 & -8 \end{pmatrix}$ の固有値・広義固有ベクトルを求めたい.

例 2.21 より, A の固有値は 2 (3 重解) である.

A の固有値 2 に属する固有ベクトル (のうちの 1 つ) $\widetilde{\boldsymbol{p}}$ として, $\widetilde{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ととれる. よって, A の固有値 2 に対する固有ベクトルが 3 本に満たない.

そこで, A の固有値 2 に属する広義固有ベクトルを求めるために,

$$(A - 2E)^2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.4.9}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 2 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ($\neq \boldsymbol{o}$) を求める (これを $\widetilde{\boldsymbol{q}}_1$, $\widetilde{\boldsymbol{q}}_2$ とする). (2.4.9) より,

$$\begin{cases} -\ \ x + 2y - \ \ z = 0 & (2.4.10) \\ -2x + 4y - 2z = 0 & (2.4.11) \\ -3x + 6y - 3z = 0 & (2.4.12) \end{cases}$$

が得られる. (2.4.10) を -1 倍すると, (2.4.11) が得られ, (2.4.10) を -2 倍すると, (2.4.12) が得られるから, 本質的には (2.4.10) の 1 本しか方程式がないと思える. (2.4.10) より, $z = -x + 2y$ を得る. よって,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ $(|s|^2 + |t|^2 \neq 0)$ が得られるから，たとえば，$\widetilde{\boldsymbol{q}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\widetilde{\boldsymbol{q}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ととれる．よって，A の固有値 2 に対する広義固有ベクトルが 3 本に満たない．そこで，

$$(A-2E)^3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.4.13}$$

を満たす，列ベクトル (のうちの 3 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (\neq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ とする)．(2.4.13) より，x，y，z は $|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 \neq 0$ を満たす，任意の複素数であるから，$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ととれる．

次に，$\boldsymbol{p}_2$ を $\boldsymbol{p}_2 = (A-2E)\boldsymbol{p}_3$ から求めることができる．よって，

$$\boldsymbol{p}_2 = (A-2E)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -4 \\ -3 & 12 & -7 \\ -4 & 17 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \tag{2.4.14}$$

ととれる．

次に，$\boldsymbol{p}_1$ を $\boldsymbol{p}_1 = (A-2E)\boldsymbol{p}_2$ から求めることができる．よって，

$$\boldsymbol{p}_1 = (A-2E)\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -4 \\ -3 & 12 & -7 \\ -4 & 17 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{2.4.15}$$

ととれる．

よって，A の固有値 2 に属する広義固有ベクトルとして，$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ととれる． ∎

例 2.34 (固有値・広義固有ベクトルの計算 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値・広義固有ベクトルを求めたい．

例 2.22 より，A の固有値は 2 (3 重解) である．

A の固有値 2 に属する固有ベクトル (のうちの 2 つ) $\widetilde{\boldsymbol{p}}_1$，$\widetilde{\boldsymbol{p}}_2$ として，$\widetilde{\boldsymbol{p}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\widetilde{\boldsymbol{p}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ととれる．

よって，A の固有値 2 に対する固有ベクトルが 3 本に満たない．

そこで，A の固有値 2 に属する広義固有ベクトルを求めるために，

$$(A-2E)^2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.4.16}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 3 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $(\neq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ とする). (2.4.16) より, x, y, z は $|x|^2+|y|^2+|z|^2 \neq 0$ を満たす, 任意の複素数である. よって, たとえば, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ととれる.
次に, $\boldsymbol{p}_1$ を $\boldsymbol{p}_1 = (A-2E)\boldsymbol{p}_2$ から求めることができる. よって,

$$\boldsymbol{p}_1 = (A-2E)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{2.4.17}$$

ととれる.

また, $\boldsymbol{p}_3$ として,

$$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.4.18}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 1 つ) で, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ と 1 次独立なものをとらねばならない. 実際, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ととれる. ∎

2.5 行列の Jordan 標準化

前節で定義した, 行列の固有値・広義固有ベクトルの概念を利用して, 行列を Jordan 標準化する方法を記述することができる.

定義 2.35 (Jordan 細胞) $\lambda \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{N}$ とする. $J_r(\lambda) \in M_r(\mathbb{C})$ が λ に対する r 次 Jordan 細胞であるとは,

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ \text{\huge 0} & & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{2.5.1}$$

となるときをいう. ∎

定義 2.36 (行列の Jordan 標準形) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする. A が Jordan 標準化可能であるとは, ある $P \in GL_n(\mathbb{C})$ が存在して,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & & \text{\huge 0} \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & J_{r_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \tag{2.5.2}$$

となるときをいう. ただし, $\sum_{\ell=1}^{k} r_\ell = n$ である. また, P を A を Jordan 標準化するための変換行列といい, (2.5.2) の右辺のような行列を Jordan 標準形という. ∎

$A \in M_n(\mathbb{C})$ が (2.5.2) のように Jordan 標準化されているとする．$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}$ とおくと，

$$P(P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & & \mathbf{0} \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & J_{r_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \tag{2.5.3}$$

となる．一方，

$$P(P^{-1}AP) = AP = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{p}_1 & A\boldsymbol{p}_2 & \cdots & A\boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} \tag{2.5.4}$$

となるから，

$$\begin{cases} A\boldsymbol{p}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{p}_1 \\ A\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 + \lambda_1 \boldsymbol{p}_2 \\ A\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 + \lambda_1 \boldsymbol{p}_3 \\ \quad \cdots \\ A\boldsymbol{p}_{r_1} = \boldsymbol{p}_{r_1-1} + \lambda_1 \boldsymbol{p}_{r_1} \\ \\ A\boldsymbol{p}_{r_1+1} = \lambda_2 \boldsymbol{p}_{r_1+1} \\ A\boldsymbol{p}_{r_1+2} = \boldsymbol{p}_{r_1+1} + \lambda_2 \boldsymbol{p}_{r_1+2} \\ A\boldsymbol{p}_{r_1+3} = \boldsymbol{p}_{r_1+2} + \lambda_2 \boldsymbol{p}_{r_1+3} \\ \quad \cdots \\ A\boldsymbol{p}_{r_1+r_2} = \boldsymbol{p}_{r_1+r_2-1} + \lambda_2 \boldsymbol{p}_{r_1+r_2} \\ \\ \quad \cdots \\ \\ A\boldsymbol{p}_{r_1+\cdots+r_{k-1}+1} = \lambda_k \boldsymbol{p}_{r_1+\cdots+r_{k-1}+1} \\ A\boldsymbol{p}_{r_1+\cdots+r_{k-1}+2} = \boldsymbol{p}_{r_1+\cdots+r_{k-1}+1} + \lambda_k \boldsymbol{p}_{r_1+\cdots+r_{k-1}+2} \\ A\boldsymbol{p}_{r_1+\cdots+r_{k-1}+3} = \boldsymbol{p}_{r_1+\cdots+r_{k-1}+2} + \lambda_k \boldsymbol{p}_{r_1+\cdots+r_{k-1}+3} \\ \quad \cdots \\ A\boldsymbol{p}_{r_1+\cdots+r_{k-1}+r_k} = \boldsymbol{p}_{r_1+\cdots+r_{k-1}+r_k-1} + \lambda_k \boldsymbol{p}_{r_1+\cdots+r_{k-1}+r_k} \end{cases}$$

を得る．このことから，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ が A の固有値であり，その重複度はそれぞれ $r_1, r_2, \cdots, r_k$ であること，固有値 $\lambda_j\,(1 \leqq j \leqq k)$ に対する広義固有ベクトルが $\boldsymbol{p}_i \left(\sum_{\ell=1}^{j-1} r_\ell + 1 \leqq i \leqq \sum_{\ell=1}^{j} r_\ell \right)$ であることがわかる．

命題 2.37 任意の行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して，Jordan 標準化可能である．また，A の相異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ の重複度がそれぞれ $n_1, n_2, \cdots, n_k$ $\left(ただし, \sum_{\ell=1}^{k} n_\ell = n \right)$ である，すなわち，

$$\Phi_A(\alpha) = (\alpha - \lambda_1)^{n_1} (\alpha - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\alpha - \lambda_k)^{n_k} \qquad \left(\lambda_i \fallingdotseq \lambda_j\,(i \fallingdotseq j), \sum_{\ell=1}^{k} n_\ell = n \right) \tag{2.5.5}$$

であるとき，固有値 $\lambda_\ell\,(1 \leqq \ell \leqq k)$ に対する 1 次独立な広義固有ベクトルが n_ℓ 本とることができ，相異なる固有値に対する広義固有ベクトルは 1 次独立である．固有値 $\lambda_\ell\,(1 \leqq \ell \leqq k)$ に対する 1 次独立な固有ベクトルが m_ℓ 本とれるとき，λ_ℓ に対する Jordan 細胞は m_ℓ 個である． ∎

明らかに，対角化可能な行列はすでに Jordan 標準化されている．よって，以下では，対角化不可能だが，Jordan 標準化可能な行列を Jordan 標準化する方法を述べる．

例 2.38 (行列を Jordan 標準化する方法 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ を Jordan 標準化した行列および A を Jordan 標準化するための変換行列を求めたい.

例 2.31 より, A の固有値は 2 (2 重解) であり, A の固有値 2 に属する広義固有ベクトルとして, $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ととることができる. よって, A を Jordan 標準化するための変換行列 P として, $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ととることができる. ゆえに, P によって A を Jordan 標準化すると, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる. ∎

例 2.39 (行列を Jordan 標準化する方法 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & 14 & -7 \\ -5 & 19 & -9 \end{pmatrix}$ を Jordan 標準化した行列および A を Jordan 標準化するための変換行列を求めたい.

例 2.32 より, A の固有値は 2 (2 重解) または 3 であり, A の固有値 2 に属する広義固有ベクトルとして, $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ ととることができる. A の固有値 3 に属する広義固有ベクトルとして, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ととることができる. よって, A を Jordan 標準化するための変換行列 P として, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ ととることができる. ゆえに, P によって A を Jordan 標準化すると, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる. ∎

例 2.40 (行列を Jordan 標準化する方法 3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -4 \\ -3 & 14 & -7 \\ -4 & 17 & -8 \end{pmatrix}$ を Jordan 標準化した行列および A を Jordan 標準化するための変換行列を求めたい.

例 2.33 より, A の固有値は 2 (3 重解) であり, A の固有値 2 に属する広義固有ベクトルとして, $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ととることができる. よって, A を Jordan 標準化するための変換行列 P として, $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ ととることができる. ゆえに, P によって A を Jordan 標準化すると, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる. ∎

例 2.41 (行列を Jordan 標準化する方法 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ を Jordan 標準化した行列および A を Jordan 標準化するための変換行列を求めたい.

例 2.34 より, A の固有値は 2 (3 重解) であり, A の固有値 2 に属する広義固有ベクトルとして, $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ととることができる. よって, A を Jordan 標準化するための変換行列 P として, $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ととることができる. ゆえに, P によって A を Jordan 標準化すると, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる.

∎

第 3 章　行列の n 乗計算についての大学入試問題への適用

例年, どこかの大学で 1 題くらいは, 対角化不可能だが, Jordan 標準化可能な行列の n 乗計算についての問題が出題されている. 本章ではこうした問題を 3 題紹介する. 各問題とも, 解答にあたっては, はじめに, 前章の内容をふまえて解答し, その後, 数研 [15], [16], [17] に基づいた解答を行う.

3.1　2005 東京海洋大学・海洋工学部

例題 3.1 (原文改題) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ とするとき, A^n を求めよ. ∎

解答　まず, A の固有値を求める. A の固有多項式 $\Phi_A(\alpha)$ は

$$\Phi_A(\alpha) = \det \begin{pmatrix} \alpha - 3 & 1 \\ -4 & \alpha + 1 \end{pmatrix} = (\alpha - 3)(\alpha + 1) - 1 \cdot (-4) = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2$$

であるから, A の固有値は 1 (2 重解) である.

次に, A の固有値 1 に属する固有ベクトルを求める.

$$(A - E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.1}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 1 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (\neq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}$ とする). (3.1.1) より,

$$\begin{cases} 2x - y = 0 & (3.1.2) \\ 4x - 2y = 0 & (3.1.3) \end{cases}$$

が得られる. (3.1.2) と (3.1.3) は同一の式なので, 本質的には (3.1.2) の 1 本しか方程式がないと思える. (3.1.2) より, $y = 2x$ を得る. よって, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(s \neq 0)$ が得られるから, たとえば, $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ととれる. よって, A の固有値 2 に対する固有ベクトルが 2 本に満たない.

そこで, A の固有値 2 に属する広義固有ベクトルを求めるために,

$$(A - E)^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.4}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 2 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (\neq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ とする). (3.1.4) より, x, y は $|x|^2 + |y|^2 \neq 0$ を満たす, 任意の複素数であるから, たとえば, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる. 次に, $\boldsymbol{p}_1$ を $\boldsymbol{p}_1 = (A - E)\boldsymbol{p}_2$ から求めることができる. よって,

$$\boldsymbol{p}_1 = (A - E)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{3.1.5}$$

ととれる.

よって, A を Jordan 標準化するための変換行列 P として, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ととることができる. ゆえに, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ であり, P によって A を Jordan 標準化すると, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となり, $P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 1^n & n \cdot 1^{n-1} \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を得る.

したがって,

$$\begin{aligned} A^n = PP^{-1}A^nPP^{-1} = P(P^{-1}AP)^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1+n \\ 2 & 1+2n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2n & -n \\ 4n & 1-2n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

となる. ∎

例題 3.1.1 (数研 [15]**)** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $B = P^{-1}AP$ を求めよ.

(2) B^n を求めよ.

(3) A^n を求めよ.

∎

解答

(1) $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ であるから

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ よって, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots$ 羈 と類推される.

この類推が正しいことを数学的帰納法で証明する.

[1] $n = 1$ のとき, ① は成り立つ.

[2] $n = k$ のとき, ① が成り立つ, すなわち

$$B^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots \text{羇}$$

と仮定する. $n = k+1$ のとき, ② より

$$B^{k+1} = B^kB = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって, $n = k+1$ のときにも ① は成り立つ.

[1], [2] から, すべての自然数 n について, ①は成り立つ.

したがって, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $B=P^{-1}AP$ から $A=PBP^{-1}$ よって $A^n=(PBP^{-1})^n=PB^nP^{-1}$
ゆえに

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 2 & 2n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & -2n+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

∎

3.2 2007 徳島大学・理系

例題 3.2 (原文改題) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき, A^n を求めよ. ∎

解答 まず, A の固有値を求める. A の固有多項式 $\Phi_A(\alpha)$ は

$$\begin{aligned} \Phi_A(\alpha) &= \det\begin{pmatrix} \alpha-3 & -1 & -1 \\ 1 & \alpha-1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha-2)+(-1)\cdot 1\cdot 0+(-1)\cdot 1\cdot 0 \\ &\quad -(\alpha-3)\cdot 1\cdot 0-(-1)\cdot 1\cdot(\alpha-2)-1\cdot(\alpha-1)\cdot 0 \\ &= (\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha-2)+(\alpha-2)=(\alpha-2)(\alpha^2-4\alpha+3+1)=(\alpha-2)^3 \end{aligned}$$

であるから, A の固有値は 2 (3 重解) である.
次に, A の固有値 2 に属する固有ベクトルを求める.

$$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.1}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 2 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}(\neq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\tilde{\boldsymbol{p}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{p}}_2$ とする). (3.2.1) より,

$$\begin{cases} x+y+z=0 & (3.2.2) \\ -x-y-z=0 & (3.2.3) \end{cases}$$

が得られる. (3.2.3) を -1 倍すると, (3.2.2) が得られるから, 本質的には (3.2.2) の 1 本しか方程式がないと思える. (3.2.2) より, $z=-x-y$ を得る. よって, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(|s|^2+|t|^2\neq 0)$ が得られるから, たとえば, $\tilde{\boldsymbol{p}}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\tilde{\boldsymbol{p}}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ととれる. よって, A の固有値 2 に対する固有ベクトルが 3 本に満たない.
そこで, A の固有値 2 に属する広義固有ベクトルを求めるために,

$$(A-2E)^2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.4}$$

を満たす, 列ベクトル (のうちの 3 つ) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $(\fallingdotseq \boldsymbol{o})$ を求める (これを $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ とする). (3.2.4) より, x, y, z は $|x|^2+|y|^2+|z|^2 \fallingdotseq 0$ を満たす, 任意の複素数であるから, たとえば, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ととれる. 次に, $\boldsymbol{p}_1$ を $\boldsymbol{p}_1 = (A-2E)\boldsymbol{p}_2$ から求めることができる. よって,

$$\boldsymbol{p}_1 = (A-2E)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.5}$$

ととれる. これは, 固有値 2 に対する固有ベクトルにもなっている. そこで, $\boldsymbol{p}_3$ を求めるが, 固有値 2 に対する広義固有ベクトルに, 固有値 2 に対する固有ベクトルを内包していることから, $\boldsymbol{p}_3$ は固有値 2 に対する固有ベクトルであるが, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ とは 1 次独立なベクトルをとらねばならないので, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ととれる.

よって, A を Jordan 標準化するための変換行列 P として, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ととることができる. ゆえに, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ であり, P によって A を Jordan 標準化すると, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となり, $P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ を得る.

したがって,

$$\begin{aligned}
A^n &= PP^{-1}A^nPP^{-1} = P(P^{-1}AP)^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & 2^n + n\cdot 2^{n-1} & 2^n \\ -2^n & -n\cdot 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & -2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n + n\cdot 2^{n-1} & n\cdot 2^{n-1} & n\cdot 2^{n-1} \\ -n\cdot 2^{n-1} & 2^n - n\cdot 2^{n-1} & -n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\left(= 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2+n & n & n \\ -n & 2-n & -n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

となる. ∎

例題 3.2.1 (数研 [17]) E を単位行列, O を零行列とし, n を自然数とする.

(1) 行列 A が, 定数 a と $B^2 = O$ を満たす行列 B により, $A = aE + B$ と表されるとする. このとき, $A^n = a^nE + na^{n-1}B$ が成り立つことを示せ.

(2) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とする．$(A-aE)^2=O$ となるように定数 a の値を定め, (1) を利用して A^n を求めよ．

∎

解答

(1) $B^2=O$ から $B^n=O$ $(n=2,3,4,\cdots\cdots)$
よって

$$A^n=(aE+B)^n=a^nE^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}E^{n-1}B=a^nE+na^{n-1}B$$

(2) $A-aE=\begin{pmatrix} 3-a & 1 & 1 \\ -1 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$ であるから,

$$\begin{aligned}(A-aE)^2&=\begin{pmatrix} 3-a & 1 & 1 \\ -1 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3-a & 1 & 1 \\ -1 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} a^2-6a+8 & 4-2a & 4-2a \\ 2a-4 & a^2-2a & 2a-4 \\ 0 & 0 & (2-a)^2 \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} (a-2)(a-4) & -2(a-2) & -2(a-2) \\ 2(a-2) & a(a-2) & 2(a-2) \\ 0 & 0 & (a-2)^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ゆえに, $(A-aE)^2=O$ となるための条件は $a=2$
したがって, $A-2E=B$ とおくと

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B^2=O$$

このとき, $A=2E+B$ であるから, (1) より

$$\begin{aligned}A^n&=2^nE+n\cdot 2^{n-1}B=2^{n-1}(2E+nB)\\ &=2^{n-1}\begin{pmatrix} 2+n & n & n \\ -n & 2-n & -n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3.3　2006 大阪府立大学・理学部・後期

例題 3.3 (原文改題) $a,\ b$ を定数とし, $A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=(A-2E)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．$P=\begin{pmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix}$ が逆行列をもち, $A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ が成り立つとき, 次の問いに答えよ．

(1) $a,\ b$ の値を求めよ．
(2) $B=P^{-1}AP$ とおく．n を自然数とするとき, B^n を求めよ．

∎

解答

(1) $P=\begin{pmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix}$ が逆行列をもつことから，2 つのベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ は線形独立であり，仮定より，$(A-2E)^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$(A-2E)^2\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つから，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ は A の固有値 2 の広義固有ベクトルであることがわかる．

よって，

$$(A-2E)^2=\begin{pmatrix} a-2 & -1 \\ b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-2 & -1 \\ b & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a-2)^2-b & -a+4 \\ ab-4b & -b+4 \end{pmatrix} \tag{3.3.1}$$

であるから，

$$(A-2E)^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a-2)^2-b & -a+4 \\ (a-4)b & -b+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a-2)^2-b \\ (a-4)b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.2}$$

$$(A-2E)^2\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a-2)^2-b & -a+4 \\ (a-4)b & -b+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \{(a-2)^2-b\}p+(-a+4)q \\ (a-4)bp+(-b+4)q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.3}$$

(3.3.2) より，

$$\begin{cases} (a-2)^2-b=0 & (3.3.4) \\ (a-4)b=0 & (3.3.5) \end{cases}$$

を得る．(3.3.4) より，$b=(a-2)^2$ を得る．これを (3.3.5) に代入すると，$(a-4)(a-2)^2=0$ を得る．よって，$a=2$ または $a=4$ となる．$a=2$ のとき，(3.3.4) より，$b=0$ となり，$a=4$ のとき，(3.3.4) より，$b=4$ となる．したがって，$(a,\ b)=(2,\ 0)$ または $(a,\ b)=(4,\ 4)$ となる．

$\underline{(a,\ b)=(2,\ 0)\ \text{のとき}}$，$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり，$A-2E=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=(A-2E)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.6}$$

となる．よって，$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ が A の固有値 2 の広義固有ベクトルであることに反し，不適である．

$\underline{(a,\ b)=(4,\ 4)\ \text{のとき}}$，$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ となり，$A-2E=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=(A-2E)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{3.3.7}$$

となる．よって，$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ が A の固有値 2 に対する広義固有ベクトルとなる．

以上より，$(a,\ b)=(4,\ 4)$ である．

(2) (1) より，$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ であるから，P を用いて A は

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.3.8}$$

と Jordan 標準化できるから，

$$B^n=(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \tag{3.3.9}$$

となることがわかる. ∎

例題 3.3.1 (数研 [16]) $a,\ b$ を実数とし, 行列 A と列ベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ を

$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ b & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = (A-2E)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする. $P = \begin{pmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix}$ が逆行列をもち, $A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ が成り立つとき, 次の問いに答えよ. ただし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(1) $a,\ b$ の値を求めよ.

(2) $B = P^{-1}AP$ とおく. 正の整数 n に対して, B^n を求めよ. ∎

解答

(1)

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = (A-2E)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 & -1 \\ b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix} \cdots\cdots \text{羈}$$

P が逆行列をもつから

$$\varDelta(P) = -q \fallingdotseq 0 \cdots\cdots \text{羇}$$

また, $A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ であるから

$$(A-2E)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0 \cdots\cdots \text{羌}$$

ここで, ②より $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから, $A - 2E = \begin{pmatrix} a-2 & -1 \\ b & -2 \end{pmatrix}$ は逆行列をもたない.

よって, $A-2E$ について, $\varDelta = 0$ から

$$-2(a-2) + b = 0$$

すなわち $b = 2(a-2) \cdots\cdots$ 羔

①, ③, ④ から $\begin{pmatrix} a-2 & -1 \\ 2(a-2) & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-2 \\ 2(a-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ゆえに $(a-2)^2 - 2(a-2) = 0$

よって $(a-2)(a-4) = 0$

$a = 2$ のとき, ④, ① から $q = 0$ となり ② に反する.

ゆえに $a = 4$

このとき, ④ から $b = 4$

(2) (1) より, $p = 2,\ q = 4$ であるから,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

よって

$$B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ここで, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C$ とおくと, $B = 2E + C$ であり

$$C^2 = O$$

よって

$$B^n = (2E + C)^n = 2^n E + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot 2^{n-1} C = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

∎

参考文献

[1] 服部昭: 線型代数学 (新数学講座 **2**), 朝倉書店, 1982.

[2] 平岡和幸, 堀玄: プログラミングのための線形代数, オーム社, 2004.

[3] 伊吹山知義: 線型代数学 (現代数学ゼミナール **1**), 近代科学社, 1987.

[4] 木内博文: 線形代数学, 横浜図書, 2004.

[5] 小寺平治: 大学入試数学のルーツ・新版, 現代数学社, 2001.

[6] 松本和一郎: 線型代数入門 –理論と計算法　徹底ガイド–, 共立出版, 2007.

[7] 宮越忠: 高校数学 $+\alpha$ なっとくの線形代数, 共立出版, 2007.

[8] 守安一峰, 小野公輔: 理工系の線形代数学入門 (サイエンス テキスト ライブラリ=**11**), サイエンス社, 2003.

[9] 長岡亮介: 線型代数学 (放送大学教材), 放送大学教育振興会, 2004.

[10] 岡本和夫: 行列と 1 次変換 (岡本和夫の基礎数学シリーズ), 実教出版, 1998.

[11] 齋藤正彦: 線型代数入門 (数学基礎 **1**), 東京大学出版会, 1966.

[12] 齋藤毅: 線型代数の世界：抽象数学の入り口 (大学数学の入門 **7**), 東京大学出版会, 2007.

[13] 佐武一郎: 線型代数学 (数学選書 **1**), 裳華房, 1958, 1974.

[14] 清史弘: 行列 (駿台受験シリーズ 分野別 受験数学の理論 **9**), 駿台文庫, 2004.

[15] 数研出版編集部 (編): 2005 年版 数学 III・C 入試問題集, 数研出版, 2005.

[16] 数研出版編集部 (編): 2006 年版 数学 III・C 入試問題集, 数研出版, 2006.

[17] 数研出版編集部 (編): 2007 年版 数学 III・C 入試問題集, 数研出版, 2007.

[18] 竹野茂治: 行列式の性質の証明について, 新潟工科大学情報電子工学科竹野研究室ウェブページ内 (`http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic2/data/detprf1.pdf`), 2006.

[19] 東京出版編集部 (編): 大学への数学 1 対 1 対応の数学/数学 C, 東京出版, 2005.