変換群と軌道分解

宿澤 修
（山梨大学非常勤講師）

1.　エルランゲン・プログラム (Erlangen program)

1872 年に F. Klein は Erlangen 大学哲学部教授就任に際し,「最近の幾何学研究の比較考察」と題する論文を発表し, 当時まで多方面に分化して個々に研究されていた種々の幾何学を
『幾何学とは, 幾何学的構造の与えられた集合 (空間) S と, S に作用する変換の群 G が与えられたとき, S の部分集合, すなわち図形のもつ種々の性質において G の作用で不変に保たれる性質を研究する学問である』
と, 変換群の概念のもとに統一的に捉える画期的な見解を公表した.

この意味での幾何学を (S, G) と表わすとき, S の特定の図形 A を不変にする G の部分群 $G(A)$ を作り, S から A を取り除いた部分空間 S' に対し, 幾何学 $(S', G(A))$ を構成するという方法によって, 当時知られていたほとんどの幾何学 (楕円型非ユークリッド幾何学, 双曲型非ユークリッド幾何学, ユークリッド幾何学など) が, 射影幾何学から構成されることを示した.

もちろん Klein 流の幾何学の捉え方に収まらない幾何学も存在するが, この観点に立つとき, 適当に空間とその変換群を与えさえすれば, とりあえず新しい幾何学が作られることになり, 幾何学の可能性が一気に広がった. また, 変換群の構造, 変換群による空間の不変量, 軌道を調べることなどが幾何をすることとなった.

2.　変換群, 軌道分解

定義 1. G を群, X を集合とし, $G \times X$ から X への写像:$(g, x) \mapsto gx$ がつぎの 2 条件をみたすとき, G は X の**変換群**であるという.
(1) $g(hx) = (gh)x \qquad (g, h \in G,\ x \in X)$
(2) G の単位元 e に対し, $ex = x \qquad (x \in X)$

定義 2. G を X の変換群とするとき, $x \in X$ に対し, X の部分集合 $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ を (x を通る) G-**軌道**という. さらに, X を異なる G-軌道の和集合として表わすことを X の G-**軌道分解** という:

$$\bigsqcup_{x \in I} Gx \qquad (\text{disjoint union},\ I : \text{代表元の集合})$$

(※) 軌道分解を与えるにあたり, 各軌道から (より良い) 代表元 (これを**標準形**という) を選びそれを決定すること, および各軌道を不変量を用いて特徴付けることなどが重要となる.

3. 軌道分解の応用例

例 1. 行列の標準化

Jordan の標準形, 正規行列の対角化, 歪対称行列の標準化, などいずれも軌道分解における代表元の決定問題といえる.

例 2. 行列の階数

一般線型群 $GL(n, K) = \{A \in M(n, K) \,|\, \det A \neq 0\}$ $(K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$ の直積群 $GL(m, K) \times GL(n, K)$ が, K の元を成分とする (m, n) 型行列から成る集合 $M(m, n; K)$ に $A \mapsto PAQ$ で作用しているとき, 各軌道は, $\mathrm{rank}A$ で特徴付けられ, つぎの軌道分解を得る:

$$\bigsqcup_{0 \le r \le \min\{m,n\}} PA_rQ, \qquad P \in GL(m, K), Q \in GL(n, K)$$

ここに, $A_r = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, E_r は r 次の単位行列.

これより, Kronecker の定理：
『連立１次方程式: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ $(A \in M(m, n; K), \boldsymbol{x} \in K^n, \boldsymbol{b} \in K^m)$ が解をもつための必要十分条件は, 行列 A と行列 $(A\ \boldsymbol{b})$ の rank が一致することである』は,
『連立１次方程式: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつための必要十分条件は, 行列 $(A\ \boldsymbol{0})$ と行列 $(A\ \boldsymbol{b})$ が上記の作用で同一軌道上に在ることである』と言うことができる.

例 3. 2 次曲線の分類

2 次曲線

$$F(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (a, b, c, f, g, h \in \boldsymbol{R})$$

に対し,

$$A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} (\neq 0), \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$$

とおくとき, つぎが成り立つ:

	$\det\widetilde{A} \neq 0$	$\det\widetilde{A} = 0$
$\det A > 0$	$\emptyset$ $(\mathrm{tr}A \det\widetilde{A} > 0)$　楕円 $(\mathrm{tr}A \det\widetilde{A} < 0)$	1 点
$\det A < 0$	双曲線	相交 2 直線
$\det A = 0$	放物線	$\emptyset$ $(S_2(\widetilde{A}) > 0)$　平行 2 直線 $(S_2(\widetilde{A}) \le 0)$

ここに, $S_2(\widetilde{A})$ は $\widetilde{A}$ の 2 次の主小行列式の総和を表わす.

(※) $A,\ \widetilde{A}$ の符号数 sgn A, sgn $\widetilde{A}$ による特徴付けもある:

sgn A	sgn $\widetilde{A}$	$F(x,\,y)=0$
(2, 0)	(3, 0)	$\emptyset$
	(2, 1)	楕円
	(2, 0)	1 点
(1, 1)	(2, 1)	双曲線
	(1, 1)	相交 2 直線
(1, 0)	(2, 1)	放物線
	(2, 0)	$\emptyset$
	(1, 1)	平行 2 直線
	(1, 0)	1 直線

ここに, $A,\ \widetilde{A}$ の符号数 $(p,\,q)$ が $p \leq q$ の組合せの場合は, $-F$ を考えればよく, 上記の場合 $(p \geq q)$ に帰着する.

(※) n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ の 2 次超曲面

$$F(x_1,\,\cdots,\,x_n)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}{x_i}^2+2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i+c=0$$

に対しても上記と同様な分類問題を考えることができ, n 次の対称行列の対角化問題 (i.e., 軌道分解) に帰着することになる.

[**参考**]　n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ の 2 次超曲面について:

$(*)$ 合同変換群による標準形:

(　) $\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\lambda_i{x_i}^2=0$　(　) $\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\lambda_i{x_i}^2+1=0$　(　) $\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\lambda_i{x_i}^2+2x_{r+1}=0$

ただし, (　) (　) $1 \leq r \leq n$, (　) $1 \leq r < n$.

$(*)$ アフィン変換群による標準形:

(　) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}{x_i}^2-\sum_{j=k+1}^{r}{x_j}^2=0\ \ (0 \leq 2k \leq r \leq n)$

(　) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}{x_i}^2-\sum_{j=k+1}^{r}{x_j}^2+1=0\ \ (0 \leq k \leq r \leq n)$

(　) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}{x_i}^2-\sum_{j=k+1}^{r}{x_j}^2+2x_{r+1}=0\ \ (0 \leq 2k \leq r < n)$.

(　) 錐　(　) 楕円型 $(k=0)$, 双曲型 $(0<k<r)$, $\emptyset\,(k=r)$　(　) 放物型

4. 例外リー群における軌道分解の例

$E_{7(-25)}$ の $\mathfrak{P} = \mathfrak{J} \oplus \mathfrak{J} \oplus \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}$ への自然な作用に対し, つぎが成り立つ:

rank$P$	標準形	B_P の符号数	$q(P)$
1	$(0,0,1,0)$	$(0,0)$	0
2	$(\mathrm{diag}(1,0,0),0,1,0)$	$(10,2)$	0
	$(\mathrm{diag}(-1,0,0),0,1,0)$	$(2,10)$	0
3	$(\mathrm{diag}(1,1,0),0,1,0)$	$(18,11)$	0
	$(\mathrm{diag}(-1,-1,0),0,1,0)$	$(2,\ 27)$	0
4	$(\mathrm{diag}(1,1,-\kappa),0,1,0)$	$(36,20)$	$\kappa > 0$
	$(\mathrm{diag}(1,1,-\kappa),0,1,0)$	$(28,28)$	$\kappa < 0$
	$(\mathrm{diag}(-1,-1,-\kappa),0,1,0)$	$(2,54)$	$\kappa > 0$

ここに, B_P は $P \in \mathfrak{P}$ により定まる $\mathfrak{P}$ 上の 2 次形式, q は $\mathfrak{P}$ 上のある 4 次形式である.

参考文献

[1] S. Bellucci, S. Ferrara, M. Günaydin, A. Marrani, Charge Orbits of Symmetric Special Geometries and Attractors. hep-th/0606209.

[2] S. Ferrara, M. Günaydin, Orbits of exceptional groups, duality and BPS states in string theory. Internat. J. Modern Phys. A 13 (1998), no. 13, 2075-2088. hep-th/9708025.

[3] S. Krutelevich, Orbits of Exceptional Groups and Jordan Systems, Ph.D. thesis, Yale Univ.

[4] O. Shukuzawa, Explicit classifications of orbits in Jordan algebra and Freudenthal vector space over the exceptional Lie groups, Comm. Algebra 34(2006), 197-217.

5. 横田ゼミについて (番外編)

数学との格闘・三山崩しの決闘