例外型単純Lie群をめぐって

– 白馬から横田ゼミに，そして博士号へ –

宮下敏一

（上田東高等学校）

純粋な数学の講演を期待されて参加された方々には，サスペンスドラマ風のタイトルに,「内容が知れたもの」とがっかりされたことと思いますが，お付き合い戴きまして有難うございました.

横田ゼミに参加するようになったきっかけは，３０年程前に白馬村での夏期研修会に出席した帰りの車中で，横田先生からゼミの存在をお話戴いたことでした．最初に参加したゼミで，院生が「Linear Lie groups」(H.Freudenthal) を読んでいましたが，理解できなかったこともあり，今もって非常に鮮烈な印象として残っています.

さて，実現された５種類の例外型単純 Lie 群はそれぞれ個性をもち，その個性（数学的構造）を調べることが大きな課題であり，それを考察し解明するために，普通は Lie 環を用います．それは，単純 Lie 環は Cartan 部分環，root 系を経て最終的には Dynkin 図形に帰着されてしまうからです. しかるに，Dynkin 図形を調べることが単純 Lie 群の数学的構造– 中心，部分群，対合的自己同型写像，表現等– を明らかにすることになるのですが，一般に Dynkin 図形から群の数学的構造を具体的に構成することは容易なことではありません．特に，E_6 型，E_7 型例外単純 Lie 群は，それぞれ巡回群 $\boldsymbol{Z}_3, \boldsymbol{Z}_2$ の中心をもつので，ルート系や Dynkin 図形の Lie 環からの情報だけで，その部分群の群構造を正確に決定することは容易ではないと考えます.
そこで，これまでの例外型単純 Lie 群に関して得られ多くの結果を用いて，群を丸ごと扱い多くの部分群の群構造を明らかにしてきました.
例えば，低次元 Lie 群の群同型を証明した際も，写像 $f : SU(4)^* \to O(1,5)_0$ を具体的に構成し，f が well-defined，準同型写像であること示し，$\mathrm{Ker} f = \boldsymbol{Z}_2$ を計算して，全射 (onto) を示し，準同型定理を用いて，群同型 $SU(4)^*/\boldsymbol{Z}_2 \cong O(1,5)_0$ を得た. また，例外型単純 Lie 群の有限位数の自己同型写像による不動点部分群の群構造を決定する場合にも，準同型定理を用いて同様の証明をしましたが，一般に全射を示すことは容易でないと思います. それを示すために，次の定理は有用であると思いますので紹介します.

定理 A G, G' を線型 Lie 群とし，$f : G \to G'$ を連続な群準同型写像とする．(1) G' は連結 (2) $\mathrm{Ker} f$ は離散 (3) $\dim G = \dim G'$ が成立すれば，f は全射である.

群の連結性を証明することも，経験上困難なことが多かったと感じています．よく知られた連結性の定義は，具体的な例外型単純 Lie 群の部分群の連結性を証明するには，ほとんど役に立ちませんので，次の定理をよく用いました.

定理 B G を Lie 群，M を多様体とし，G が M に推移的に作用しているとする．また，$x \in M$ の固定部分群を G_x とする．このとき，微分同相 $G/G_x \simeq M$ である.
特に，G_x, M が連結ならば，G も連結である.

例外型単純 Lie 群には，次の様なスピノール群（$SO(n)$ を２重被覆する連結な群）の系列が在ります.

$F_4 \supset Spin(9) \supset Spin(8) \supset \cdots \supset Spin(1) \ni 1$
$\cap$
$E_6 \supset Spin(10)$
$\cap$
$E_7 \supset Spin(12) \supset Spin(11)$
$\cap$
$E_8 \supset Ss(16) \supset Spin(15) \supset Spin(14) \supset Spin(13)$

これらのスピノール群は $Spin(15)$ を除いて，具体的に構成され実現できています.
特に，E_8 に $Spin(14)$ が構成できたときには，横田先生との様々なやりとりがありまして，印象深い想い出として残っています.

例外型単純 Lie 群のある部分群がスピノール群であることを示すためには，その群の連結性の証明は避けて通れない．例えば，F_4 の $Spin(8)$ は，普通は $(F_4)_{E_1}$ として実現されますが，E_7 にもその部分群 $((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}$ として $Spin(8)$ が実現できます．$Spin(8)$ であることを示すためには，まずは上の定理 B を用いて，その部分群の連結性を示し，それにより $SO(8)$ への写像が定義でき，定理 A によって全射が分かり，準同型定理を用いて，

$$((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)}/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(8)$$

となり，$((E_7)^{\kappa,\mu})^{\gamma})_{\dot{F}_1(he_4)} \cong Spin(8)$ を得ます.

実際に証明するためには，抽象論で押し通すことより，計算して結果を得ることばかりで，そのなかでも群の作用が推移的に働くことを示すことが，もっとも重要でかつ計算が大変な場面でありますが，群が大きくなるにつれ，exp 等の計算が複雑なり，容易なことではありません．そんな訳で，未完成のままのテーマも在る訳ですが，多くの研究テーマが完成までに歳月が掛っても，これまで幸いなことに何とか形になってきました.

また，2, 3 年前に京都大学に出しました第3種階別 Lie 環の部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_{ev}, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{ed}$ の群実現の横田先生との共著論文：

3-graded decompositions of exceptional Lie algebras $\mathfrak{g}$ and group realizations of $\mathfrak{g}_{ev}, \mathfrak{g}_0$ and $\mathfrak{g}_{ed}$, Part II, $G = E_7$, Case 1, Case 2,3 and 4, Case 5 ,J. Math. Kyoto Univ.

は，群実現に着手し始めてから完成までおよそ 5 年を要しました．群 $G = G_2, F_4, E_6$ は既に横田先生が完成させて，論文になっていました．その後，直ちに E_7 に進まれたのですが，やがて休止になりました．そのあとを引き継いだ形で，何とか完成させることができました．内容は，E_7 型の Lie 環の第 3 種階別分解の構成と部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_{ev}, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{ed}$ の群実現です．1 つでも実現ができなければ，論文になりませんので，これも幸いとしか言いようがありません.

例外型単純 Lie 群に関わって，既に 28 年余りが経過しました．その間，きちんとした勉強はしませんでしたが，横田先生はじめ多くの先生方にお教えを戴き，またゼミのメンバーからは有益な助言を戴いたことで，今が在るものと思っています．それと，ゼミ後の $\Sigma\upsilon\mu\pi\grave{o}\sigma\iota o\nu$ も貴重な知的エネルギー源でした.

最後になりますが，もっとも愛読した横田一郎著「例外型単純リー群」（現代数学社）について，少し触れたいと思います．初版が 1992 年 6 月．総頁数 195．5 個の例外群を G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 の順に，それぞれの群の定義，極大コンパクト部分群の実現から Lie 環，Dynkin 図形の情報まであらゆる具体的結果が述べられています．小林俊之著「Lie 群と Lie 環 1，2」(岩波書店) の文中には”類書がない”と賛辞が送られています．多くの方に，是非読んで戴きたいと思いますが,「例外型単純リー群」の本をインターネットで検索しますと，現在中古でも 1 万数千円するようで，さらに部数も少なく，残念なことに入手が非常に困難なようです.

わたくしごとですが，一昨年 10 月に慶応義塾大学理工学部より博士（理学）の学位を授与して戴きました.