群と対称性

横田一郎
(信州大学名誉教授)

群が作用する図形, すなわち, 図形の対称性についてお話します. これから話の中に登場する用語や定義を以下に書きます.

群 G

定義　集合 G の任意の 2 つの元 a, b に対して G の元 ab が一意に定まり, 次の 3 つ条件

(1)　$(ab)c = a(bc)$ が成り立つ,

(2)　G に 1 と書かれる特定な元が存在して, G の任意の元 a に対して $1a = a1 = a$ が成り立つ,

(3) G の任意の元 a に対して, $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ をみたす G の元 a^{-1} が存在する,

をみたすとき, G は **群** であるという.

群の例

(1) $\boldsymbol{Z}$ (整数加群),　Q (有理数加群),　$\boldsymbol{R}$ (実数加群).

(2) $\boldsymbol{Z}_2 = \{1, \alpha\}, \quad \alpha^2 = 1$.

(3) $S^1 = U(1) = \{z \in \boldsymbol{C} \,|\, z\overline{z} = 1\}$.

(4) $SO(n) = \{A \in M(n, \boldsymbol{R}) \,|\, A\,{}^t\!A = E, \mathrm{det}A = 1\}$ (回転群).

(5) $SU(n) = \{A \in M(n, \boldsymbol{C}) \,|\, AA^* = E, \mathrm{det}A = 1\}$ (特殊ユニタリ群).

(6) $Sp(n) = \{A \in M(n, \boldsymbol{H}) \,|\, AA^* = E\}$ (シンプレテイツク群).

$SO(n), n \geq 3, n \neq 4,\ SU(n), n \geq 2,\ Sp(n), n \geq 1$ は 連結コンパクト**古典型単純 Lie 群**と呼ばれている群である. ここで, **単純 Lie 群**の定義を与えておこう.

定義　集合 G が次の 3 つの条件

(1) G は可微多様体である,

(2) G は群である,

(3) 写像 $\mu : G \times G \to G,\ \mu(a, b) = a^{-1}b$　は可微分である,

をみたすとき, G は **Lie 群** であるという.

Lie 群 G が連結正規部分群を含まないとき, G は **単純**であるという.

群の作用

定義　G を群とし, X を集合とする. G の任意の元 a と X の任意の元 x に対して X の元 gx が一意に定まり, つぎの条件

(1)　$g_1(g_2x) = (g_1g_2)x, \quad g_1, g_2 \in G, x \in X,$

(2)　$1x = x, \quad 1 \in G, x \in X,$

をみたすとき, G は X に **作用する** また G は X の **変換群**であるという. (物理では X は (G による) **対称性** をもつというらしい).

注意　群 G の集合 X の作用がつぎの条件

元 $g \in G$ が, 凡ての $x \in X$ に対して $gx = x$ がなりたつのは, $g = 1$ に限る

をみたすとき, G の作用は **効果的** あるという.

ここでは, 群 G の 集合 X への作用は常に効果的である としておく.

等質性

定義　群 G の集合 X の作用がつぎの条件

X の任意の２つの元 x, y に対して, $gx = y$ をみたす X の元 g が存在する.

このとき, G は X に **推移的 に作用する** または X を (G による) **等質空間** であるという.

対称空間

定義　多様体 M の各点 p に対して, p の近傍 V_p と p を孤立不動点 とする V_p の自己双対写像 ν_p が存在するとき, M を **対称空間** という.

以上の用語を用いて, 長方形, 正方形, 球面 等 の図形がどのよう対称性をもつかをお話したいと思っています.

最後に, Killing-Cartan により分類された単連結コンパクト単純 Lie 群を書いておきます.

$SU(n)$	$Spin(2n+1)$	$Sp(n)$	$Spin(2n)$
n^2-1	$n(2n+1)$	$n(2n+1)$	$n(2n-1)$

G_2	F_4	E_6	E_7	E_8
14	52	78	133	248

上の段の４つ群は古典型単純 Lie 群とよばれ, 次の段の５つの群は例外型単純 Lie 群とよばれています. なお, 下に書かれている数字はそれらの Lie 群の次元です.