

大小比較の実態調査と考察 ~つまずきのルーツを探る~

下伊那支会 今村 晃 (阿智高校) 服部 靖之 (飯田高校)
 桐生 正 (阿南高校) 矢崎 俊一 (飯田風越高校)
 小笠原浩子 (飯田工業高校) 後藤 光利 (飯田長姫高校)
 藤井 栄司 (松川高校) 小池 聡 (下伊那農業高校)

1. テーマ設定の経緯

授業を実践する中で「こんなことができない」「こんなことも知らない」などと私たちが感じ、口にすることは多い。「こんなこと」とはいつても、あれもこれもという感じになってしまうのだが、生徒が感じる「つまずき」の原因を根本的に見つめ直し、「こんなことができようになった」「こんなことも分かる」という喜びを感じられるようになるための有効な手立てを研究する第一歩として今回の研究テーマを設定した。

2. 研究の内容・方法

生徒が感じる曖昧さが引き起こす「つまずき」と向き合い、改めて生徒理解を深め今後の教育活動に生かすために、次のようなアンケートを実施した。具体的なイメージがつかめず、系統的に関連づけながら数学の世界を広げられないでいる生徒の実態とその原因をアンケートから分析し、直感に訴える指導のあり方を考察してみたい。

3. アンケートの実施方法と内容

アンケート(別紙資料)は「大小関係」を直感的に把握できる程度の小問を5題1セットにして、問題1~問題3までの計15題を高校1年生552名(飯田下伊那地区の高校1年生の約40%程度)に25分で解いてもらった。解答は選択肢の中から選んで、記号で答える形式をとった。

問題1は「小学校程度の知識で考えられるもの」、問題2は「指数や平方根、負の数など中学校で習う知識を必要とするもの」、問題3は「文字を含むもの、無理数の近似値を必要とするものなどイメージのつかみにくさはあるものの、問題1、問題2と関連づけて解いて欲しい問題」を選定した。小問は番号ごとに問題をまたいで横断的に関連性をもたせた。

実施校は飯田下伊那地区の公立8校(阿智、阿南、飯田、飯田長姫、飯田工業、飯田風越、下伊那農業、松川)で、各校40名以上の生徒を対象にアンケートを行った。

4. アンケートの結果と誤答分析

以下のデータは、小問(5題)ごとにどの選択肢を何人が選んだのかを学校別に実数で表したものである。データ中の「修正正答率」とは、学校規模やアンケート参加人数の凸凹をなくすために以下の方法で平均化した一つの指標である。まず、各学校に1~8の番号をつけ、学校別に小問ごと参加者の正答率を出し、それをその学校の平均正答率とする。番号 $i(i=1,2,\dots,8)$ の学校の平均正答率を a_i 、1年生の全生徒数を n_i 、 $N = \sum_{i=1}^8 n_i$ として、修正正答率(%) = $\frac{\sum_{i=1}^8 n_i \times a_i}{N}$ と定めた。これを以下では単に「正答率」と呼ぶ。

(1) 小問【1】について

問題1の正答率は94%ではあるが、問題2・3との間に大きな溝ができています。問題2と3の正答率がほぼ同じ数値であるところが興味深い。小学校6年生の教科書では $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{4}$ の大小を線

分図を利用したり通分して比較させているため、分子が固定されているときに分母の大小で考えるという経験が乏しいと推測できる。また、

$$\frac{1}{2} = 1 \div 2 = 0.5 \quad , \quad \frac{1}{4} = 1 \div 4 = 0.25 \quad \text{のように小数に変換}$$

して考えている生徒も多いため、問題2, 3では割り算($1 \div \sqrt{3}$ や $1 \div a$)が実行できない点と簡単に通分ができていない点(問題2)が、つまずきのルーツと思われる。

問題	1	2	3	4	5	6
A	98	10	48	21	80	36
B	98	7	98	79	94	41
C	79	3	78	3	78	1
D	98	15	48	24	48	28
E	98	4	93	19	94	18
F	34	3	38	8	34	6
G	71	0	94	17	98	15
H	93	8	29	18	19	28

(2) 小問【2】について

問題1はもとにする数の0.7倍、問題2はもとにする数(0.2)の0.2倍と考えれば同様の問いだ、視覚的にはそのように認知できていない。問題1では、「もとの数」という具体性のなさや小数倍(そのまま割合の概念へとつながっていく)のイメージの曖昧さが直感を働き難くしていると思われる。例えば、 $4 \times 0.7 = 2.8$ という計算はできても、経験の中で4(もとになる数)と28(計算した結果)の大小関係を見比べると意識が育っていないのではない。

問題2では、 0.2×0.2 の計算ミスも考えられる。また、掛けると大きくなるという「九九」のレベルでの固定観念が定着しているケースも考えられる。指数の計算の意味が分かって計算できてしまう生徒にとっては、問題1との関連づけは不要であったろう。

問題3では、問題2でできた計算が具体的にできなくなる。問題1・2で類推できることは0.7や0.2を掛けると(掛ければ掛けるほど)小さくなって0に近づくということ。しかし、 a^2 と a^3 の比較で a の具体的な姿を見失ってしまえば、2と3の短絡的な大小比較で済ましても何ら不思議に感じないようである。 a の任意性や文字に具体的な数値を代入することは、約4割の生徒にとっては、かなり高度であることがうかがえる。また、不等式に慣れていないため、条件 $0 < a < 1$ およびこの条件の重要性を認識できない生徒もいると考えられる。

小問(2)、大きいのはどっち? ($0 < a < 1$)

解答群	問題1		問題2		問題3	
	元の数より大	元の数より小	元の数より大	元の数より小	元の数より大	元の数より小
A	41	21	43	35	21	50
B	43	30	49	31	32	50
C	73	0	78	1	50	30
D	69	4	66	13	42	26
E	65	7	63	9	34	39
F	34	7	32	1	30	39
G	69	2	69	2	56	39
H	78	10	78	10	18	30
総数	494	43	463	38	463	114

(3) 小問【3】について

大小関係を問うものではないが、今回の分数の和、差、通分の問題に関しては大半の生徒が正しく処理することができた。しかし、選択問題であるために正答率が高くなったことも事実であろう。問題2は中学校の「正負の計算」の単元からの出題だが、ここでも教科書にはない異分母の計算に特に抵抗感は見られないように見える。しかし、これも選択肢が選びやすいもの、絞り込みやすいものだったことが多少なりとも影響しているだろう。また、 $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} < 0$ という結果を、 $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{2}$ の大小

関係とみる視覚の広さがもてれば不等号の理解やイメージも深まると思われる。

問題3は問題1・2と関連づけて考えることが難しかったようで、通分して $\frac{1}{a} = \frac{2}{2a}$ とすることが

できなくなってしまった(正答率が2.4%下落)。結果的に、 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{a} = \frac{1+1}{2a+a} = \frac{2}{3a}$ という典型的な

誤答にはまってしまう生徒が各校で見られた。原因としては通分という計算手続きの意味を理解していないことや、 $\frac{1}{a} (= 1 \div a)$ そのものが何であるか

認知できていないことが考えられる。 $\frac{a}{2} + \frac{a}{3}$ の様

に同類項をまとめる計算が、混乱した生徒にどう見えるのかは興味深いところである。

小問(4)、大きいのはどっち

解答群	問題1		問題2		問題3	
	元の数より大	元の数より小	元の数より大	元の数より小	元の数より大	元の数より小
A	35	47	50	34	43	57
B	45	55	67	39	51	44
C	9	73	69	10	37	50
D	12	61	56	17	40	39
E	13	59	60	14	39	53
F	5	39	51	9	37	11
G	3	69	57	14	37	34
H	28	13	20	20	22	31
総数	202	340	275	166	416	119

(4) 小問【4】について

問題1・2・3に亘り、「もとの数」は任意なので、自分でどんな数をイメージしてもいいわけだが、「もとの数」という言葉のもつ抽象性が難解さを与えたと思われる。また、小数で割る、無理数で割るといふことの具体的な意味が説明しづらく、整数で割るときのイメージに固執しすぎて割り算のイメージが納得いく形で拡張されていないことを物語っている。「整数で割る」イメージとは、「ケーキを等分する(等分除)」や「いくつ含まれるか(包含除)」といった生活に密着した具体的なモデルに当てはめることである。普通に割り算ができない数という意味では、分数や小数、無理数などは受け入れがたく実体のない曖昧な数として放置されているのではない。

問題3に至っては $\div 0.5 \Rightarrow \div \frac{1}{2} \Rightarrow \times 2$ といった

形式的な作業で乗り切ることができないため、全問の中で唯一正答率が50%を下回っている。「1より小さな正の数で割る」という問題なので、本質的には問題1と同じことであるが、 $2 - \sqrt{2} \approx 0.6$ という近似計算ができず困惑した生徒も多かったと思われる。しかし、ほとんどの学校で圧倒的に誤答の方を選んでしまった理由は何か。

無理数で割る(もしくは無限小数で割る)といった視覚的な混乱以外に、次のような理由が推測できはしないだろうか。それは「 $2 - \sqrt{2} > 0$ なので割ると小さくなる」という認知エラーを起こしているという推測である。問題なのは $2 - \sqrt{2}$ が1より大きいのか小さいのかということであるが、情報を処理し整理していく中で0と1との扱いを混同してしまい、さらには「割ると小さ

くなる”という初歩的で短絡的なミスをさらに誘発することになるのではないだろうか。なお、解法のプロセス(作業)を区分けして誘導すれば、中位以上の生徒の正答率は上がったと予測される。

小問④、大きいのはどっち

問題	問題①		問題②		問題③	
	正答率(%)	不正率(%)	正答率(%)	不正率(%)	正答率(%)	不正率(%)
A	38	62	52	48	34	66
B	42	58	57	43	53	47
C	4	96	69	31	37	63
D	12	88	56	44	46	54
E	12	88	45	55	35	65
F	9	91	31	69	37	63
G	3	97	37	63	37	63
H	28	72	33	67	34	66
合計	20.0	80.0	47.8	52.2	37.8	62.2

(5) 小問【5】について

実際に計算をして金額の大小比較をしたかどうかは不明であるが、思いの外良くできたという印象である。問題1に関しては、「45%引き」を半額までは安くないということを直感的、もしくは経験的に知っているようだ。誤答のパターンとしては「 2000×0.55 」を「 2000×0.45 」と取り違えたことが考えられる。これも「45% 0.45倍」という形式的な解法パターンにはまると思い込み、「引き」の部分を見落とすという認知的な能力の問題、視覚の問題といえる。

問題1 2 3と段階的に正答率が落ちている原因としては、百分率より歩合への馴染みのなさが考えられる。3割引きの計算を $2000 \div 3 = 666.666 \dots$ とした生徒もいた。さらに、問題2と3の正答率の開きが印象的であるが、「3割引き = $666.666 \dots$ 引き」だからに「3割引きが安い」という誤解をする生徒に加え、日常生活における根拠のない直感に頼って「500円引きから600円引きでは100円(も)安くなっているのだから」と結論づけ、問題3では「600円引きが安い」の方を選んだ生徒もいるように思われる。問題3は全体の最後の問題ということもあり集中力を欠いたり(疲れか?)、根拠のないまま中間的な「同じ」という答えを選べなかった生徒もいたと思う。だが、「もとにする量を1とみて比べる量を考える」という割合のイメージを小学生につかませるのは難しくとも、年齢とともに経験的に試行錯誤を重ねつつ、関心や理解を深められる可能性を感じた。

小問⑤、どちらが安い(元値2000円に於いて)

問題	問題①		問題②	
	正答率(%)	不正率(%)	正答率(%)	不正率(%)
A	12	88	50	50
B	12	88	72	28
C	5	95	75	25
D	18	82	59	41
E	18	82	50	50
F	9	91	31	69
G	1	99	49	51
H	7	93	33	67
合計	11.8	88.2	50.0	50.0

5. まとめと今後の課題

大小比較に限定して行った今回のアンケートではあるが、その誤答分析をしながら見えてくるもの、今後の授業に役立てられることを考察した。

生徒にとって「分かる」とは、抽象的な数学的概念を、「教師の伝える具体的なイメージや考え方の枠組みをまねすることから始めることであり、それが自分にとって当たり前で自然なものとしてイメージし再構成できるようになることであり、自分で創り上げたその概念をに他人に伝えられるようになることである」と思う。そして、平易なイメージや言葉で説明できるようになったとき、もしくは生活経験的に理屈を納得できたときに生徒達は「分かった」と感じるのであろう。

生徒の欲しているのは初めから「厳密性」ではなく、むしろ厳密性は欠いても「分かる」ということである。「分かる」という経験を蓄積させることが生徒の意欲を引き出し、数学の世界を連鎖的に広げていくことにつながるのではないだろうか。私たちにとって知識の深さ、多様性を磨くことの重要性は言うまでもなく、相手が「分かる」ようにそれを伝える技術と熱意を高めていくことが私たちの使命であり、今後の課題でもある。そのためには、各学校の実情に併せて、学習内容の大胆な再構成・再構築が必要となる場面が出てくるように思われる。

このアンケートを通して「霧が晴れたようにイメージがつかめてきた」といった感動を少しでも多くの生徒に味わわせたいと、再確認することができた。