

日々の授業で数学的活動を実現する

- 教科書の問題を変えて -

個人研究 横澤克彦（上田千曲高）

1. はじめに

新しく告示された学習指導要領では、「数学的活動」が日々のすべての授業において実現されなければならない「内容」として位置づけられた。

本稿では、そのために日々使っている教科書の問題を変えることやその問題をつくるための表などを提案していく。

2. 実現に向けた問題意識

数学的活動とは何か。
現場は日々の授業でどう実現したらよいか。

3. 問題意識への示唆

教科書の問題に予想を取り入れてみる。

太郎君は次のような計算をした。正しいだろうか。
 $(x+3)^2 = x^2 + 9$

生徒たちの予想は「正しい」「正しくない」の2つに分かれる。「異なる予想」が生じることは、生徒たちの興味・関心をより引き出し、理由を考えようとする動機づけを与えることになる。

このとき生徒たちの中には、目的意識をもった主体的な活動（数学的活動）が生まれているのではないだろうか。

これを、予想させない授業と比べてみる。

次の式を展開せよ。 $(x+3)^2$

どちらも授業時間的には、ほとんど差がない。

日々使っている教科書からの数学的活動の実現を目指したとき、このような予想を取り入れる方法が考えられないだろうか。

数学的活動とは、目的意識をもった主体的な活動である。

日々の実現には、日々使う教科書の問題を変える（予想を取り入れる）ことを提案する。

4. 示唆を生かして教科書の問題を変える表

横項目では問題の種類（基本・応用）を設定し、縦項目には、新学習指導要領の第3款に特記された配慮すべき項目（3つ）を設定した。

注：表中の - は問題番号，上段は科目の内容，下段は問題のタイトルを示している。

種類 配慮	A. 教科書の 基本的な問題	B. 教科書の 応用的な問題
(1) 自ら 課題... 発展	A (1) - 数と式 「有理化など」	B (1) 場合の数 「道順など」
(2) 生活 関連... 活用	A (2) データの散らばり 「電車とバス」	B (2) 漸化式，極限 「薬の投薬量」
(3) 考え 表現... 議論	A (3) 順列，離散グラフ 「地図の塗分け」	B (3) データの相関 「ダイエット」

5. 変えた問題とその考察

A. 教科書の基本的な問題を扱う授業において

(1) 「自ら課題...発展」に配慮したとき 数と式「2連続整数」

教科書の問題

連続する2整数の2乗の差は、もとの2数の和になっている。このことを証明しなさい。

予想を取り入れた問題

$$3^2 - 2^2 = 5$$

$$4^2 - 3^2 = 7$$

$$^2 - ^2 = 9$$

- (1) にはどんな数字が入りそうか。
(2) $101^2 - 100^2$ の答えを予想しよう。
(3) いつでもいえそうか。

数と式「有理化」

教科書の問題

$1 / (\sqrt{6} - \sqrt{5})$ を有理化せよ。

予想を取り入れた問題

5, 6, 7 は数直線上で等間隔に並んでいる。
では、 $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ も等間隔に並んでいるか予想せよ。

無味乾燥な計算練習を数学的活動に変えたい。

$\sqrt{(-5)^2} = -5$ は正しいか

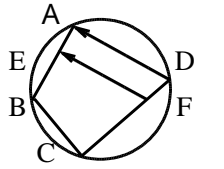
$\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ と同じ値のものはどれか

ア $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ イ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

ウ $\sqrt{5}-\sqrt{6}$ エ $\sqrt{6}-\sqrt{5}$

$\sqrt{a+\sqrt{b}}$ と $\sqrt{a+b}$ はどちらが大きいか

ABCD が円に内接するとき、AD // EF でつくられる EBCF は円に内接するか。



(2) 「生活と関連...活用」に配慮したとき
データの散らばり「電車とバス」

教科書の問題

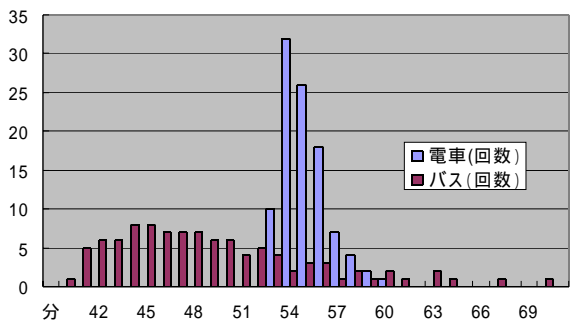
ボールを 8 回投げた飛距離の記録（省略）から飛距離の平均値と標準偏差を求めよ。

予想を取り入れた問題

これから 58 分以内に、ある目的地に着きたいと思っています。あなたは電車とバスのどちらを選びますか 到着時間の 100 日間の記録から、次の 2 つが分かっています。

ア．平均は、電車 55 分、バス 50 分だった。

イ．グラフは、次のようになった。



ともに平均値と標準偏差について考える問題である。大切なことは、調べたことが未来の意志決定につながっているかである。目的がないまま平均値や標準偏差を求めるのでは作業的な数学的活動になってしまう。

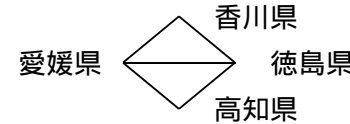
(3) 「考え表現...議論」に配慮したとき
順列、離散グラフ「地図の塗り分け」

教科書の問題

異なる 3 色を使って四国 4 県の地図を塗り分ける方法は何通りあるか。

予想を取り入れた問題

異なる色を使って四国 4 県の地図を塗り分ける。ただし、隣合う県は同じ色に塗らないとする。このとき、図のように隣合う県同士を結んだ離散グラフを使うと、同じ色で塗れない県に注目しやすくなるという。



(1) 使う色は最低何色が予想しよう。
1 色 2 色 3 色 4 色

(2) 離散グラフの見方を話し合おう。

(3) 塗り方は何通りあるか。（横澤，2006）

ここは順列の学習場面だが、最低何色かを予想するときに、離散グラフを使うとより見通しがよくなり追究しやすくなる。

B. 教科書の応用的な問題を扱う授業において
(1) 「自ら課題...発展」に配慮したとき
場合の数「道順など」

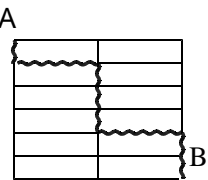
教科書の問題

節末問題として、次の 4 題を解け。

予想を取り入れた問題

問題 1 と同じ式で解けるのは、問題 2 ~ 問題 4 のうちどれか。

問題 1. ~~~ のように A から B まで行く、最短の道順は何通りあるか。



問題 2. a 6 個、b 2 個の 8 文字を 1 列に並べる方法は何通りあるか。

問題 3. 3 種類の果物 a, b, c から 6 個入りの箱詰めを 1 箱つくる。果物の組合せは何通りあるか。ただし 1 個も取らない果物があってもよいとする。

問題 4. $a+b+c=6$ の負でない整数は何組あるか。

この 4 問の解法はすべて同じ式(${}_8C_2$)になる。この単元は問題ごとの解法が混同されやすく定着も悪い。しかしなぜこれらが同じ式になるのかに疑問をもち、改めてそれぞれの解決過程を振り返ることで、それまでの知識や技能が統合されていくことが期待される。

(2) 「生活と関連...活用」に配慮したとき
漸化式，極限「薬の投薬量」

教科書の問題

次の条件によって定められる数列 $\{ a_n \}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 440, \quad a_{n+1} = 0.4 a_n + 440$$

予想を取り入れた問題

ねんざをした彼女は医師から炎症を抑える薬を 10 日分処方された．

そして 1 日 3 回服用することを指示された． 1 回分の薬の量は 440mg である．

彼女の体内では、この薬を 40 % 吸収できるものとする．

また薬の残量とは、飲んだ直後に測ったときの体内に残っている薬の量 (mg) とする．

	A
1	440
2	616
3	686.4
4	714.56
5	725.824
6	730.3296
7	732.13184
8	732.85274
9	733.14109
10	733.25644
11	733.30258
12	733.32103
13	733.32841
14	733.33136

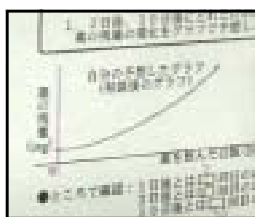
(NCTM, 2000) (注：表は解説で使ったもの)

問題 1. 2 日後，10 日後の薬の体内残量はどれだけか．残量の変化をグラフで予想しその理由をいえ．

問題 2. 残量の均衡値を 500mg にしたい．投薬量を何 mg にしたらよいか．

問題 3. 分解排出能力が 1 割落ちたときグラフは問題 1 と比べてどう変化するか．

予想の段階を入れると多くの生徒が単調増加のグラフ (右図) をかいていた．その後 Excel で数値による検証をし (左表)，グラフが収束していくことが確認された．



このときの驚きや意外性が大きいほど，新たな修正への動機づけが強化されていく．実際の授業でも「何でだ何でだ」という予想との食い違いから追究意欲が高まった．

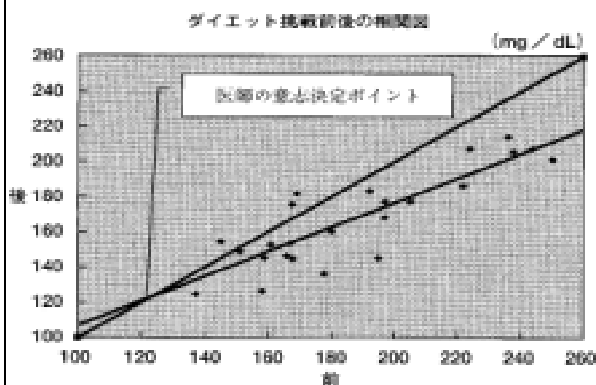
漸化式は実生活に根ざした題材を扱いやすく，その有用性を実感できる問題が多い．しかし授業ではその処理に重点がおかれやすく，式づくりや振り返りの場面で，実生活との関連を意識させられることが少ない．

(3) 「考え表現...議論」に配慮したとき
データの相関「ダイエット」

教科書の問題

表 (省略) は 2 種類のテストの得点結果である． 2 つの得点の相関係数を求めよ．

予想を取り入れた問題



ある商品を使ってダイエットに挑戦するか迷っている．グラフはその商品を使用する前後でのコレステロール値の増減を相関図にして示したものである．

- (1) あなたはこの商品を使ったダイエットが有効だと思いますか．
- (2) 「あなたは」の主語を「この商品販売業者は」「医者は」「患者は」に置き換えて，それぞれの立場から意見とその根拠を述べてください．

(2) のように主語を変えることで，データの見方や解釈が幾つも出てくることを経験させたい．

6. おわりに

予想を取り入れて教科書の問題を変えることで，日々の授業においても数学的活動の実現が期待できることを示した．これだけでなく，私たちは今回の改訂の趣旨を授業という形にしていかなければならない．そのためには一人一人の取り組みだけではなく，より多くの先生方との情報交換や授業研究が不可欠である．

私の経験で有意義だったのは，同じ指導案を 3 人で実践したり，同じねらいに違う問題を用意するなどの比較を取り入れた授業研究だった．

これからも多くの実践や知恵が必要です．それらの蓄積と情報交換を一緒をお願いします．