研究発表２－３

工業高校における数学の授業の一考察

～魅力ある授業づくりに向けて～

岡谷工業高等学校　久保田弥生

⑴「数学」と「工業」の関連づけ

赴任してまず、生徒の頭の中で「数学の授業」と「工業で用いる数学」が全く別物になっているという現状に驚いた。工業で「道具」として用いている数学は、まさしく高校数学の分野、或いはそれ以上の内容が多い。工業科の科目と同様数学も大切だという意識を持ってもらいたい、そういった思いから、「数学」と「工業」を関連づけた数学の授業ができないか、と思い立った。

⑵ 昨年度の実践

(1)目的：パスカルの三角形を作成し、その塗り分けをすることで、数学の美しさやシンメトリーに気づくことができる。

(2)単元：数学 A　場合の数と確率　二項定理　パスカルの三角形を紹介したあと　(3 時間)

(3)クラス：岡谷工業高校情報技術科 1 年 41 名

(4)展開

＜第 1・2 時間目＞

三角形のワークシートを配布し、ポケコンを用いてパスカルの三角形を作成した。彼らは全員入学時にポケコンを購入しており、ポケコンを用いて面倒な計算をすることに抵抗を持っていないようだったので、最大 12 桁の数になるくらいまでの計算をさせた。が、最初はみな上の二つの数字を地道に足す作業をしていたが、1 ヶ所でも計算間違いがあるとその後の計算が全て狂うことに気づき、「計算ミスを最小限に抑える計算方法はないか」と相談を受けた。そこで、コンビネーションの計算をするよう勧めた。

＜第 3 時間目＞

ある程度パスカルの三角形ができてきたら、別の三角形のワークシートへの色塗りをした。「偶数」「奇数」を選ぶ生徒が多い中、「5 の倍数もラクだよ」と選択する生徒、また、面倒な「7 の倍数」にチャレンジする生徒もいた。どのテーマで色を塗り分けても面白い幾何学模様が出てくるのだが、生徒達はそれに感動し、計算していない部分(続きの部分)がどのようになるのか想像する生徒もいた。

↑7 の倍数を塗る

↓3 の倍数を塗る

実は、このような幾何学模様は、手作業でやらなくても Excel を用いて if 文や mod などをうまく使えば、もっと楽に作ることができる。しかし、1 年生ではまだ Excel で sum と avg くらいしか使っていないということだったので、あえて手計算をさせた。

(5)結果

パスカルの三角形を実際に作成し、色の塗り分けをすることで、幾何学模様ができることに感動し、「数学のシンメトリー」や「美しさ」に触れられた。また、続きがどのような模様になるのか想像して塗る(実際にはフラクタルな図形になる)など、自発的に活動する生徒の姿が見られたことはよかった。また、Excel を用いた色塗りに関してもヒントを与えておいたため、情報機器に長けている生徒の中で、誰か一人でも取り組んでくれればいいと考えている。

パスカルの三角形でもう少し踏み込めば、フラクタルな図形への拡張、数の分類、フィボナッチ数列　等々への発展から理解の深化を促すための題材はいくらでもあるが、今回は 1 年生での授業で、数列の履修前ということもあり、生徒の実情に合わせると、「数学って美しい、数学って面白い、こんなものも数学なんだ」と思える事がまず大切だと考えた。

⑶ 今年度の実践

昨年度は「数学を学習する手段として工業的なテーマを扱った」だけであるから、「工業と数学の融合」を視野に入れた、それでいて「生徒に身につけさせたい数学的な力」をもっと明確にし、深

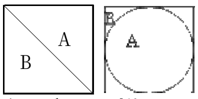
いところまで踏み込める題材について検討し、専門科との合同授業を実践した。

(1)目的：「モンテカルロ法によるπの近似」を題材に、数学と工業を融合させた数理的考え方を身につけさせ、数理的思考力・創造力・課題解決力を育成する

(2)クラス：長野工業高校情報技術科 2・3 年生(2 年生 9 人、3 年生 7 人) 16 名

(3)展開 9:00～12:30 の 3 時間半

①容器にビーズをまく

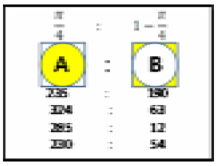


まず「斜めに仕切られた四角い箱」へ、次に「円形の容器がすっぽり入った正方形の箱」へ、なるべく均一になるようにビーズをまくよう指示をした。ビーズの個数と A や B の面積との間に関係があることに気づき、また、「均一に」まくことの難しさも経験したようだ。生徒はまだこれがどのように発展するのかわかっていない。

↓ビーズをまく様子

②ビーズの個数を数え、それらの値から何か求められないか→モンテカルロ法の理解

どうやらビーズの個数比と面積比はイコールで結べそうだ。各班でまいたビーズの個数から算出されたπの近似値は、2.211765、3.348837、3.838384、3.239437 といったものであった。



↑各班でのビーズの個数の比

③プリントを用いて、机上にてモンテカルロ法の数学的な考え方を確認する

実際にビーズの個数を数えてπの近似値を求めているので、$\pi = \frac{4A}{A+B}$ という式がほぼ全員導けた。

πの近似値が良い値にならないのは「ビーズの数が少ない」「受ける容器が小さい」等が原因であるという意見が出た。

④アルゴリズムを考え、プログラムを作成

モンテカルロ法に関する簡単な説明を受けただけでアルゴリズムを書くのは難しい。しかし今回のように、実際にモンテカルロ法を体験してみることで、体験した事を流れに沿って思い出しながら記号や数式で表せば、それがそのままアルゴリズムになる。

容器を使った実験	アルゴリズム
・ランダム →	乱数を用いる
・ビーズをまく →	座標平面上に点を打つ
・容器の中と外 →	円の内部と外部
・$\frac{4A}{A+B}$により πを求める →	Pai=4*n/imaxにより πを求める

```
//
//  モンテカルロ法   関数の面積
//
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

main(){
                double i,imax,n;
                double x,y,s;

                n=0.0;
                imax=10000.0;

                for(i=0;i<=imax;i++){
                                x=rand()/(RAND_MAX+1.0);
                                y=rand()/(RAND_MAX+1.0);

                                if((-4*x*x+4*x)>y){
                                                n+=1.0;
                                }
                }

                s = n/imax;

                printf("%e\n",s);
}
```

生徒の書いたプログラム

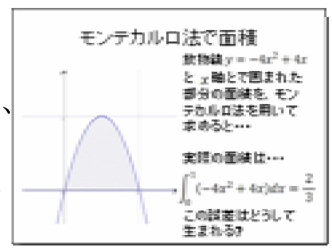
アルゴリズムが書けた後、プログラムを作成してコンパイルし、πの近似値を求めた。しかし、打つドットの個数をいくら増やしても、自分が知っているπの近似値には小数点以下第 3 位くらいまでしか合わない。どうしてだろう？

⑤モンテカルロ法を用いて、放物線とx軸とで囲まれた部分の面積を求めるプログラムを考える

ここでは、モンテカルロ法が正しく理解できたことを確認するために、求積問題をモンテカルロ法を用いて解かせた。

モンテカルロ法の一番の特徴が「乱数を用いてランダムに点を打ち、定めた領域にドットが入るか入らないかの個数(確率)を求めたい値に関連づける」という部分にあることについて生徒はよくわかっているため、打ったドットが放物線より上なのか下なのかを判断するために、どのような式を用いたらよいか、数学Ⅱの教科書の「図形と方程式」の「領域の図示」の単元を開いて考えていた。その後の手順(アルゴリズム)はπの近似値を求めるものと同一なので、プログラムを書くことも手際よくやっていた。

打つドットの個数を増やすと、より正確な面積の値に近づくように見える。3 年生はもう既に整関数の積分を履修し終えているので、積分を用いた面積計算をさせてみた。結果、いくらドットの個数を増やしても、モンテカルロ法を用いて出した面積値と積分

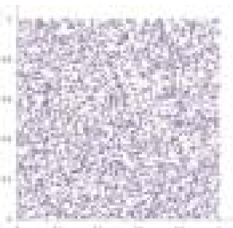


値とでは、やはりズレがあることに気づいた。先のπの近似値にせよ、今の面積にせよ、どうして誤差が出るのだろうか？中には､「コンピュータには原因がなく、もともと 3.14･･･という値は、つじつまを合わせて出てきたものなのかなぁ」とつぶやく生徒まで出てきた。

⑥モンテカルロ法ではどうして精度が上がらないか考えさせる

ドットをより多く打てば、誤差の問題は解消するのか？実はコンピュータで用いる乱数関数では、その精度に限界があり、本当の意味での「ランダム」は作ることができないのだそうだ。

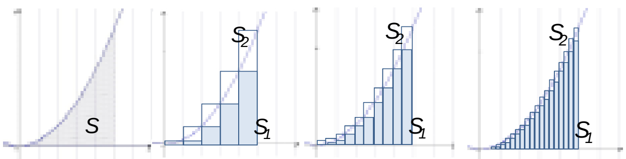
実際、Excel の RAND 関数を用いて点を座標平面上にプロットしてみたところ、右図のようにかなりのムラができており、一様ではない。コンピュータでランダムが実現できない理由としては正しくないのかもしれないが、数の稠密性も絡んでいるのかもしれない。



Excel で描いた乱数

⑦定積分を用いて面積を求めると正確な値が出る理由を説明する

3 年生は、(数学Ⅲではまだそこまでいっていないが)昨年度 2 年次に「区分求積」をざっと学んでおり、きちんと理解はしていないまでも、スライドによる説明にうなずいていた。2 年生は、これから微積分の分野を学ぶので、その予習的な意味合いとして説明を熱心に聞いていた。



(4)考察

モンテカルロ法によって算出したπの値がどうしても自分の知っている値にならないため､「じゃあモンテカルロ法では正確なπの値が出ないんだ」｢いま計算されているπの 2 兆 5 千億余桁もの正確な値はどんな方法で求められているのか」「もっと精度の高い､πを求める方法はないのか」と質問してくる班があった。アルキメデスの方法やビュッフォンの針､無限級数を用いる方法など､πの近似値を出す方法はほかに幾通りもある。数学史に関連して様々なπの求め方を調べたり経験させたりすることは、数学の授業としては設定ができるけれども､「工業との融合」という点からすると少し外れてしまうかと思い、今回はそこまでは深入りしなかった。しかし、実際に生徒が興味を持っているため、どこかでこのような授業を計画してもよいかもしれない。

或いは、複雑な積分計算の代わりに用いるほかにモンテカルロ法はどんなところで用いられているのか、モンテカルロ法の利点について調べてみるのも新たな課題学習として設定できそうだ。

(5)まとめ

今回の授業においては､「モンテカルロ法を用いて実際にπの近似値を求める事、より正確な値に近いものを出す事」が目的ではなくて､「こんな方法を用いればπの近似計算ができるという事を実感し、それをしっかりと理解した上で、プログラムを書く。それを実行すると、いくらπの値を大きくしても自分の知っているπの値に近づかず限界があることを知り、どうしてそうなるのかその原因を考える」という一連の流れにあった。生徒の声から、普段は数学と工業とが別物になっている現状がある中、今回の授業によって、数学が大切だと感じてくれ、また「もっとほかのπの求め方も知りたい」と言う生徒もおり、更にプログラムを書くのに数学が必要であることを実感してくれたことから、このような融合授業には意義があることがわかった。次の授業をどう組み立てようか、意欲が湧く。

日常生活の中で何の意識もなく普通に用いている事柄の背景に、数学的に重要な事項が隠れている。また、古人が研究・追求してきた事柄を、あたかも当然であるかのように現在の自分たちは使っている。そのような事は、教員が生徒に積極的に伝えていかなければ、彼らは全く気にすることなく過ごしていってしまう。日常に潜む数学的事象や、古人のなしえてきたその歴史に触れる重要性に、専門高校に限らず様々な学校において、数学の授業の中で着目し扱うことで､「物事を追求する楽しさ」も感じることができればと思っている。