# Cayley 射影平面と例外群 $F_4$

研究委員：横澤克彦（上田千曲高校）　大池　誠（上田高校）　後小路正人（上田染谷丘高校）
宮下敏一（上田東高校）　小山英樹（丸子修学館高校）　小林雅子（東御清翔高校）

## 0. はじめに

今年度の上小支会の研究発表は，発表者の都合から上記研究委員の方々にご了承を得まして，高校数学から離れた内容を紹介する形式に致しました．それ故，高校において数学を教える立場や視点からは，直ちに参考にして戴けるものは殆ど無いと思いますが，ご容赦下さい．
しかし，少しだけ弁解のようなことをさせて戴きますと，数学の世界で決してメジャーとは言えない例外群の領域と思います．そして，Lie 群といえば古典型-$O(n), U(n), Sp(n)$ 等-は知っているとよく聞きますが，例外群はあまり馴染みが無いようです．然るに，その領域の一端を Cayley 射影平面と関連づけて，紹介したいと考えました．

○ 参考文献

∗射影平面の幾何について
1. 射影平面の幾何学（遊星社　郡　敏男著）
2. 位相幾何学から射影幾何学へ（現代数学社　横田一郎著）

∗ 射影空間の位相について
3. 群と位相（裳華房　横田一郎著）

∗Lie 群及び例外群について
4. リー群入門（日本評論社　松木敏彦著）
5. 例外型単純リー群（現代数学社　横田一郎著）

## 1. 実，複素，4 元数射影平面

まず，体 (field) について述べる．体は少々荒っぽく言うと，加減乗除が行うことができる数の集合ということができ，実数体 $\boldsymbol{R}$，複素数体 $\boldsymbol{C}$, 4 元数体 $\boldsymbol{H}$ はよく知られている．さらに，結合法則を必ずしも仮定しないと，Cayley 代数 $\mathfrak{C}$ もほぼ体と同じ性質をもつ数の集合である．そして，体（結合法則を必ずしも仮定しない）として

$$\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{H} \subset \mathfrak{C}$$

である．

$\boldsymbol{R}$ 上の有限次元ベクトル空間で体（結合法則を必ずしも仮定しない）は，$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}, \mathfrak{C}$ に限るかという予想が在り, 内積が定義されている仮定のもとで H. Freudenthal が，一般の場合に J.F. Adams が肯定的に解決した．

$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ に対して，ベクトル空間 $K^3 - \{0\}$ に同値関係 $\sim$ を

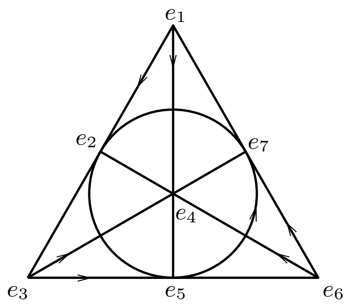
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y_i = x_i \lambda \, (i = 1, 2, 3) \\ \text{をみたす } \lambda \in K \text{ が在る} \end{array}$$

と定義したとき，この等化集合 $K^3 - \{0\}/\sim$ を $KP_2$ で表し，$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ にしたがい，**実射影平面，複素射影平面，4 元数射影平面**と言う．

Cayley 代数は一般に結合法則が成立しないので，Cayley 射影平面を上記の方法で定義することはできない．そこで，実，複素，4 元数射影平面の定義を Cayley 射影平面にも通用するように変更するのである（後述を見て戴きたい）．
猶，今回の発表では，射影平面の位相に関する結果を述べるに留め，幾何に関する内容 ([1],[2]) はまったく触れないが，それはわたくしがその方面の知識を持ち合わせていないと言ったほうが正しいかも知れない．

## 2. Cayley 代数

Cayley 代数について，上記で若干触れたが，ここでは計算公式等も含めて具体的に述べてみたい．まず，Cayley 代数の象徴的図形を示そう．




8 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 $\mathfrak{C}$:

$$\mathfrak{C} = \left\{ x = \sum_{i=0}^{7} x_i e_i \;\middle|\; x_i \in \boldsymbol{R} \right\}$$

に積を $e_1e_2 = e_3$, $e_2e_3 = e_1, ..., {e_k}^2 = -1, k \neq 0$, $e_ke_l = -e_le_k, k \neq l, k \neq 0, l \neq 0$ で定義する．このとき，$\mathfrak{C}$ を **Cayley 代数**と言う．ここに，$e_0 = 1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ は $\mathfrak{C}$ の基 (basis) である．

内積 $(x, y) = \left( \sum_{i=0}^{7} x_i e_i, \sum_{i=0}^{7} y_i e_i \right) = \sum_{i=0}^{7} x_i y_i$,

長さ $|x| = \sqrt{(x, x)}$,　逆元 $\dfrac{\bar{x}}{|x|^2}$,

共役元 $\bar{x} = x_0 + \overline{\sum_{i=1}^{7} x_i e_i} = x_0 - \sum_{i=1}^{7} x_i e_i$

• **公式**　$x, y, a, b \in \mathfrak{C}$ とする．　1. $|x||y| = |xy|$
2. $(ax, ay) = (a, a)(x, y)$
3. $(ax, by) + (bx, ay) = 2(a, b)(x, y)$
4. $a(\bar{a}x) = (a\bar{a})x$, $a(x\bar{a}) = (ax)\bar{a}$, $a(xa) = (ax)a$
5. $\bar{b}(ax) + \bar{a}(bx) = 2(a, b)x = (xa)b + (xb)a$
6. $(ax)(ya) = a(xy)a$（Moufang の公式）etc.

## 3. 例外 Jordan 代数

27 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(3, \mathfrak{C})$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(3, \mathfrak{C}) &= \{ X \in M(3, \mathfrak{C}) \mid X^* = X \} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \xi_k \in \boldsymbol{R},\, x_k \in \mathfrak{C} \right\} \end{aligned}$$

に Jordan 積 $X \circ Y$ を

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$$

で定義する．このとき，$\mathfrak{J}$ を**例外 Jordan 代数**と言う．また，$\mathfrak{J}$ に Freudenthal 積を

$$\begin{aligned} X \times Y = \frac{1}{2}(&2X \circ Y - \mathrm{tr}(X)Y - \mathrm{tr}(Y)X \\ &+ (\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y) - (X, Y))E) \end{aligned}$$

で定義する．

そして，内積 $(X, Y)$，3 項式 $(X, Y, Z)$，行列式 $\det X$ を上の積を用いて，

内積 $(X, Y) = \mathrm{tr}(X \circ Y)$,

3 項式 $(X, Y, Z) = (X, Y \times Z)$,

行列式　$\det X = \dfrac{1}{3}(X, X, X)$

のように定義する．

## 4. Cayley 射影平面

Cayley 射影平面 $\mathfrak{C}P(2)$ を

$$\mathfrak{C}P(2) = \left\{ X \in M(3, \mathfrak{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} X^* = X,\ X^2 = X, \\ \mathrm{tr}(X) = 1 \end{array} \right\}$$

で定義する．
そこで，$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とするとき，

$$KP(2) = \left\{ X \in M(3, K) \;\middle|\; \begin{array}{l} X^* = X,\ X^2 = X, \\ \mathrm{tr}(X) = 1 \end{array} \right\}$$

を $K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ にしたがい，$KP(2)$ を実射影平面，複素射影平面，4 元数射影平面の定義とする．

このとき，上の定義と **1**. の射影平面の定義が一致することを確認しなければならない．それには，写像 $f : K^3 - \{0\} \to KP(2)$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2} \begin{pmatrix} x_1\bar{x}_1 & x_1\bar{x}_2 & x_1\bar{x}_3 \\ x_2\bar{x}_1 & x_2\bar{x}_2 & x_2\bar{x}_3 \\ x_3\bar{x}_1 & x_3\bar{x}_2 & x_3\bar{x}_3 \end{pmatrix}$$

で定義するとき，$f$ から誘導される写像 $\tilde{f} : (K^3 - \{0\})/ \sim \to KP(2)$ が全単射であることを示せばよい．(詳細は [3] を参照)

### 5. 射影平面と古典群

まず，次の定理を用意する．

> **定理** コンパクト群 $G$ が Hausdorff 空間 $X$ に推移的に働いている．$G$ の $x_0 \in X$ における固定部分群を $G_{x_0}$ として，写像 $\bar{p} : G/G_{x_0} \to X$ を $\bar{p}(gG_{x_0}) = gx_0$ と定義すると，$\bar{p}$ は同相写像である．
>
> したがって，$G/G_{x_0}$ と $X$ は位相空間として同型である：
>
> $$G/G_{x_0} \simeq X.$$

（証明は [3] を参照）

この定理を用いて，位相空間の同型：

$$O(3)/(O(1) \times O(2)) \simeq \boldsymbol{R}P(2)$$

を丁寧に証明しよう．

そこで，写像 $\mu : O(3) \times \boldsymbol{R}P(2) \to \boldsymbol{R}P(2)$ を

$$\mu(A, X) = AXA^{-1}$$

で定義すると，この働きにより $O(3)$ が $\boldsymbol{R}P(2)$ に推移的に働く．実際，$X \in \boldsymbol{R}P(2)$ に対して，$X$ は実対称行列 $({}^tX = X)$ であるから．$B \in O(3)$ により

$$B^{-1}XB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},\ \lambda_k \in \boldsymbol{R}$$

のように対角化できる．さらに，$X^2 = X$ より $(B^{-1}XB)^2 = B^{-1}XB$ であるから

$$\begin{pmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_3}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

となる．よって，${\lambda_k}^2 = \lambda_k$, 即ち $\lambda_k = 0$ または $\lambda_k = 1$, $k = 1, 2, 3$ となる．また，$\mathrm{tr}(X) = 1$ より $\mathrm{tr}(B^{-1}XB) = 1$ となるから，$B^{-1}XB = E_1, E_2$ または $E_3$ のいずれかである．

$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in O(3)$ とすれば，$C^{-1}E_1C = E_3$ となり，また $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in O(3)$ とすれば，$C^{-1}E_2C = E_3$ となる．

よって，$A = BC$ とおくと，$A^{-1}XA = E_3$，即ち $X = AE_3A^{-1}$ である．これで $O(3)$ の $\boldsymbol{R}P(2)$ に対する推移性が示せた．

最後に，$O(3)$ の $E_3 \in \boldsymbol{R}P(2)$ における固定部分群を定めると次の様になる．

$$\begin{aligned} O(3)_{E_3} &= \{A \in O(3) \mid \mu(A, E_3) = E_3\} \\ &= \{A \in O(3) \mid AE_3 = E_3A\} \\ &= O(2) \times O(1) \end{aligned}$$

また，$O(3)$ がコンパクト，$\boldsymbol{R}P(2)$ が Hausdorff 空間であることはよいので，以上より先の定理を用いて，

$$O(3)/(O(1) \times O(2)) \simeq \boldsymbol{R}P(2)$$

を得る．

残りの場合:

$$\begin{aligned} U(3)/(U(1) \times U(2)) &\simeq \boldsymbol{C}P(2), \\ Sp(3)/(Sp(1) \times Sp(2)) &\simeq \boldsymbol{H}P(2) \end{aligned}$$

も同様に証明できる．

実射影平面の群 $O(3)$ への埋め込みは，写像 $f : \boldsymbol{R}P(2) \to O(3)$ を

$$f(X) = E - 2X$$

で定義すると，$f$ は単射同相写像になり，$\boldsymbol{R}P(2)$ と像 $f(\boldsymbol{R}P(2))$ を同一視すると埋め込み

$$\boldsymbol{R}P(2) \subset O(3)$$

を得る．

同様に，$\boldsymbol{C}P(2) \subset U(3)$, $\boldsymbol{H}P(2) \subset Sp(3)$ も分かる．

**6．例外群 $F_4$ とその部分群**

例外型単純 Lie 群は，$\mathrm{G}_2, \mathrm{F}_4, \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8$ の５つのタイプが在り，複素単純 Lie 環の分類は，今から遡ること約１世紀，É.Cartan-W.Killing によって，５つのタイプが在ること証明された．現在は，コンパクト型，非コンパクト型合わせて，計２２個の例外型単純 Lie 群がすべて具体的に構成されている．

まず，例外型コンパクト Lie 群 $F_4$ を

$$F_4 = \{\alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}(3,\mathfrak{C})) \,|\, \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y\}$$

で定義する（この定義は，古くから知られていたようである）．

また，$F_4$ は Freudenthal 積 $\times$ を用いて

$$F_4 = \{\alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}(3,\mathfrak{C})) \,|\, \alpha(X \times Y) = \alpha X \times \alpha Y\}$$

のように定義してもよい．

特に，$\alpha \in F_4$ とすれば，$\alpha E = E, \mathrm{tr}(\alpha X) = \mathrm{tr}(X), (\alpha X, \alpha Y) = (X, Y)$.

ここで，$F_4$ の部分群を２つ与えよう．

$$(F_4)_{E_1} \;=\; \{\alpha \in F_4 \,|\, \alpha E_1 = E_1\} \subset F_4$$

$$Spin(8) \;=\; \{\alpha \in F_4 \,|\, \alpha E_k = E_k, k = 1,2,3\} \subset F_4$$

ここに，$E_k \in \mathfrak{J}(3,\mathfrak{C})$ である．($Spin(8)$ については，説明を要するところであるが，上のような群であると認めて下さい（詳細は [5] 参照）.）

そこで，部分群 $(F_4)_{E_1}$ を考察しよう．そのために，９次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 $V^9$ を

$$\begin{aligned} V^9 \;&=\; \{X \in \mathfrak{J}(3,\mathfrak{C}) \,|\, E_1 \circ X = 0, \mathrm{tr}(X) = 0\} \\ &=\; \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & x \\ 0 & \bar{x} & -\xi \end{pmatrix} \,\middle|\, \xi \in \boldsymbol{R},\, x \in \mathfrak{C} \right\} \end{aligned}$$

で定義し，そのノルムを $(X, X) = 2(\xi^2 + x\bar{x})$ で与える．このとき，８次元球面を

$$S^8 = \{X \in V^9 \,|\, (X, X) = 2\}$$

で定義すると，次の位相空間としての同型を得る：

$$(F_4)_{E_1}/Spin(8) \simeq S^8.$$

この結果から，$(F_4)_{E_1}$ が連結であることが分かる（詳細は [5] 参照）．

よって，写像 $\pi : (F_4)_{E_1} \to SO(9)$ が定義でき，群同型

$$(F_4)_{E_1} \cong Spin(9)$$

を得る．即ち，$(F_4)_{E_1}$ の群構造が $Spin(9)$ であることが分かった（詳細は [5] 参照）．

**7．同相**　$F_4/Spin(9) \simeq \mathfrak{C}P(2)$

**補題**　$^\forall X \in \mathfrak{J}(3,\mathfrak{C})$ は，$^\exists \alpha \in (F_4)_0$ により対角化される：

$$\alpha X = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix}, \; \xi_k \in \boldsymbol{R}$$

さらに，$\xi_1, \xi_2, \xi_3$ は順序を除いて $X$ に対して一意に定まる（詳細は [5] 参照）．

> **定理**
> $$F_4/Spin(9) \simeq \mathfrak{C}P(2)$$

証明　$F_4$ は $\mathfrak{C}P(2)$ に働くので，その働きが推移的であることを示そう．それは，$^\forall X \in \mathfrak{C}P(2)$ がある $\alpha \in (F_4)_0$ により $\alpha X = E_1 \in \mathfrak{C}P(2)$ を示せばよい．そこで，補題から $^\forall X \in \mathfrak{C}P(2)$ は $\alpha \in (F_4)_0$ により対角化（補題の形）できる．
また，$\mathfrak{C}P(2)$ の条件から $k = 1,2,3$ に対して，

$$\xi_k = 1, \xi_{k+1} = \xi_{k+2} = 0, \text{即ち}, \alpha X = E_k$$

を得る．

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in SO(3) \text{ 対して，}$$

$\beta : \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}, \beta(X) = TXT^{-1}$ とすれば

$$\beta \in (F_4)_0, \beta E_2 = E_1.$$

即ち，$\beta\alpha(X) = E_1. \alpha X = E_3$ のときも同様である．これで推移性が示された．また，$E_1 \in \mathfrak{C}P(2)$ における $F_4$ の固定部分群は $SPin(9)$ である．よって，先の定理からこの定理を得る．■