離散数学（グラフ理論）で授業しませんか？*1

－次期、学習指導要領改訂への準備提案－

長野県上田千曲高等学校　横 澤 克 彦

要　約

本研究の目的は､離散数学の内容としてグラフ理論を取り上げた場合の教材研究を行うとともに、実際に高校現場に導入されたことを想定して、複数の教員（３名）で単元として系統的に指導を行い（20 時間)、各教員の授業方法とその指導前後での生徒アンケートを比較することで、グラフ理論を扱うときに、どのような授業を展開すればよいかの示唆を得ることにある。

離散数学（グラフ理論）では、言葉で考え論証する力が期待されているが、必ずしも予備知識を必要としないことや現実場面に関する応用問題が多いこともあり、生徒の数学への好感度や有用性の認識は改善されやすくなる。また操作的活動の場面を増やしたり、クラスやグループ内での議論の場面を増やすことで、生徒の数学に取り組む姿勢や態度も改善されてくることが分かった。

さらにこうした結果は、各教員がこれまでの授業方法を見直すきっかけにもなっていった。

キーワード：グラフ理論　活動　議論　単元指導　複数教員　授業比較

１．はじめに

離散数学の高校への導入に向けて、期待されていることは主に２つある。(長尾･長崎,2006)

①言葉で考え論証することができる

②数学の社会的有用性をはじめ、数学的な見方や考え方のよさを感じ取ることができる

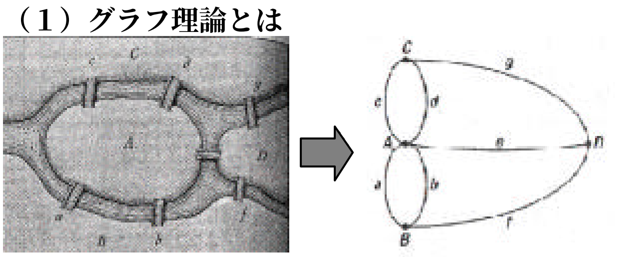
しかし内容が新しいだけに、実際にどのような授業をすればよいのか想像ができなかった。

そこで本研究では、実際に導入されたときに近い形で検証する必要があると考え、筆者だけではなく複数の教員で指導にあたり、さらにトピック的な扱いではなく単元として系統的な指導を行うことにした。

こうした検証を経ることで、期待を実現するための授業方法に、よりよい示唆が得られるのではないかと考えた。

２．グラフ理論への着目

（１）グラフ理論とは



グラフ理論は離散数学の一分野であるが、有名なケーニヒスベルグの橋渡り問題に対してオイラーが解法を示したのが起源とされている。

問題構造を保存したまま頂点と辺だけのグラフに抽象化し、それがもつ様々な性質を探究しようとするものである。

また辺に向き（矢印）がつくと有向グラフ、辺に数値がつくとネットワークと呼ばれるが、これについては、５（２）事例２：家を建てる最短日数の問題でも取り上げる。

（２）グラフ理論への着目

離散数学にある多くの分野の中で単元として系統的に指導することを考えたとき、グラフ理論は次のような点で特に適した内容であると考えた。

①必ずしも予備知識を必要とせず、いろいろな方法で解決できる問題が多いこと

②現実場面に関する応用問題が多く、社会的有用性を実感しやすいこと

③問題を適切にグラフ化するなどの操作的活動の場面や自らの考えをもとに言葉で議論する場面を設定しやすいこと

３．生徒の実態

本校は７学科からなる職業高校であり、就職と進学（主に専門学校）が半々である。

授業は工業系４学科の３年生（143 名）に対して、３名の教諭が２学期中間考査から期末考査までの 20 時間をかけて行った。教諭の経験年数はそれぞれ２年，15 年，17 年である。

例年この時期は数学Ⅲで簡単な置換積分・部分積分を履修している時期であるが、３年生のほとんどは進路を確定しており、授業も解法パターンの模倣になることが多くなっていた。

グラフ理論は前述のよさもあるため、卒業前に少しでも数学に対する認識や態度が改善され、共感してくれる生徒を増せたらと考えた。

４．単元構成に向けた内容の選択と配列

ＣＰＭＰ(Core-Plus Mathematics Project)がつくるカリキュラムの中で、離散数学領域に示されているねらいや構成をもとに、本校での構成を考えた。(Arthur F.Coxford etal,1998)(西村,2006)

扱う内容の選択については、２（２）①②③を踏まえながら、期待できる見方や考え方を具体的に吟味していった。

また生徒のつまずき(9,11 時限目最短日数など)やいろいろな見方や考え方をさせるために、繰り返し扱うように配列した内容(4,8 時限目：航空機の飛行高度など）もあった。

【 単 元 構 成 】

内　容	ねらい	構成 課	構成 タイトル	期待できる見方・考え方（各課でのねらい）
第１節グラフモデル １オイラー経路	計画作り、衝突への対処、効率的な経路の検索といった、有限個の要素間の関係を含む現実世界の場面を表現し分析するために頂点－辺グラフを使う力を身につける。	1	①一筆書き	・グラフ作り、次数の利用
２二部グラフ		2	②地図の色分け ③円卓で男女知合い隣１	・辺の両端塗り分け ・オイラー経路との違い
３ハミルトン経路①		3	④博覧会の経路 ⑤会議の曜日分け	・オイラー経路との違い ・二重辺の使い方
４交グラフ①		4	⑥周波数 ⑦航空機の飛行高度	・グラフの比較 ・運航図を交グラフへ
５ｹﾞｰﾑ理論・必勝法		5	⑧数獲り，花占いゲーム	・４の倍数，逆思考
		6	⑨握手問題	・グラフ化で解を特定
６二値化 ７ハミルトン経路②		7	⑩畳の敷詰め問題 ⑪格子路の頂点通過問題	・二値(白黒)化して比較 ・二値(白黒)化して比較
８交グラフ② ９問題		8	⑫航空機の飛行高度 ⑬問題作り	・運航図を交グラフへ ・他の場面への適応
第２節ネットワークの最適化 10 有向グラフ①	グラフを使って、最小全域木や最短路を含むネットワークの最適化に関係する現実事象の問題を表現し、分析できる能力を身につける。	9	⑭文化祭準備の最短日数 ⑮家を建てる最短日数	・有向グラフ，ネットワークの利用
11 木・最小全域木		10	⑯雪かき問題	・最小全域木発見の手順 ・ハミルトン経路との違い
		11	⑰仕事の短縮日数は？！	・最短ｽｹｼﾞｭｰﾙ作成の手順
		12	⑱早くｶﾚｰが食べたい！	・他の場面への適応
12 問題		13	⑲木が使える場面を探せ	・他の場面への適応
第３節行列モデル 13 有向グラフ②	いくつかの領域にある重要な数学	14	⑳バス・列車の経路	・場面→グラフ→行列表現

14 行列計算	的考えを繋ぎ合わせる一方、様々な現実事象の問題を表現し解決するために、行列や行列の演算を用いる能力を身につける。	15	21 グラフの行列計算①	・積，累乗，和差積実数倍
		16	22 グラフの行列計算②	・交換法則不成立
15 ネットワーク マルコフ連鎖		17	23 グラフから天気予報	・ｸﾞﾗﾌ→行列→ﾏﾙｺﾌ連鎖 ・社会的有用性
演習問題 プレテスト① プレテスト② 期末考査	理解の定着を図り身の回りで生かしていく態度を身につける	18 19 20	24No.１-３，５-７演習 25No.４，８-１７演習 26 期末考査	・場面の二値化，グラフ化 ・グラフや行列の場面適応

５．授業で見られた活動や議論の場面

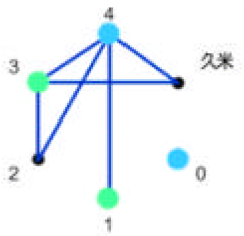
単元構成の中から指導事例を３つ取り上げ、実際にどのような活動や議論が見られたのかを記述していく。

（１）事例１：握手問題（秋山仁, 1999）

（単元６時間目：グラフ化で解を特定）

> 問題：久米さんは、夫人同伴でパーティーに出席しました。そこにはほかに２組の夫婦が出席していました。合計６人の間で、握手が交わされました。どの人も、自分の同伴者とは握手せず、また同じ人と２度以上は握手をしませんでした。握手が交わされたあと、久米さんは、彼の奥さんを含めた各人に、何回握手したかとたずねたところ、どの人も異なる回数を答えました。
> さて久米夫人は何回握手をしたでしょうか？

①活動の場面



実際に６人グループをつくり役割を決めて握手してみるという活動を行った。

生徒たちはとりあえず握手をしてみることからはじめ、問題をまず把握しようとしていた。そして同伴者とは握手しないことや同じ人と２度以上握手しないという条件の意味を理解していった。

またどの人も握手の回数が異なることについては、一人一人が握手した回数を指で表わしながら、握手できる相手を捜していった。

②議論の場面

活動をふまえて得られた結論だっただけに自信を持って「２回」と答える生徒が多かった。

しかしその理由を聞くと「やってみたらそうだったから」という程度だったため、グラフをかき始めていた何人かの追究を紹介し、それを根拠にグループ内で説明し合うことを求めた。

自分では納得できても相手に説明できないもどかしさを経験しながら、解を特定していく手順を確認していった。

（２）事例２：家を建てる最短日数

（単元９時間目：有向グラフ，ﾈｯﾄﾜｰｸの利用）

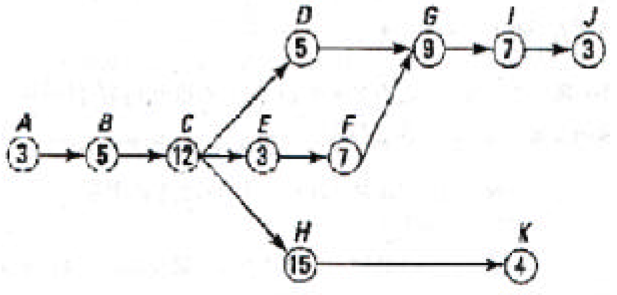
問題：家を建てる際の段取りが次のようになっている。

手　　順	日数	事前に済ますこと
A 家を設計する	3	特になし
B 基礎打ち	5	A
C 柱を立てる	１２	B
D 水道の配管	5	C
E 電気配線	3	C
F 冷暖房の設置	7	E
G 断熱材・壁処理	9	D，F
H 外装	１５	C
I 内装	7	G
J じゅうたん	3	I
K 庭つくり	4	H

それぞれの手順を順番に進めていくと、全部で 73 日かかってしまう。しかしグラフを使うとより効率的な作業手順を考えることができる。グラフをつくってこの家を完成させるための最短日数を決めなさい。

①活動の場面

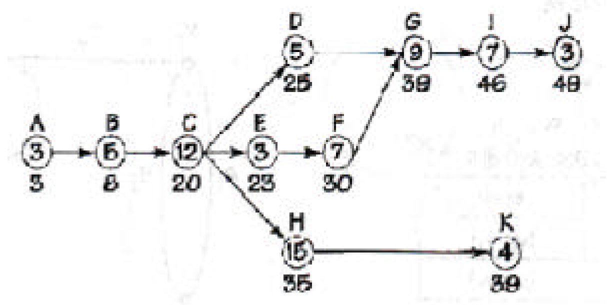
原問題でははじめからグラフが与えられていたが授業ではつくることから始めた。



これは数値の入った有向グラフを扱う最初の授業だったのでその作図練習も兼ねたからである。

まずここで隣同士のグラフを見比べ、相談しながらグラフ作りに入っていった。そしてクラスがこのグラフ（有向グラフとネットワーク）の妥当性を共有できたところで、最短日数の議論に入った。

②議論の場面



図のようにかかる日数を足していき、作業終了は最短でＪの 49 日という結論を得る。しかしある生徒が「なぜ最小を求めるのに多い方の数字を足していくのか」と発言した。

つまり「Ｊ 49 日とＫ 39 日を比べれば、最小は 49 日じゃなくて、当然 39 日のはずだ」ということだった。

そしてクラスへは「なぜ最小を探すのに最大を足していくのか」について、話題をＧでの計算方法に絞って議論させていった。

「ＧにはＤ，Ｆがつながっている。Ｇでかかる日数 9 日を足す相手が、なぜＦ 30（30+9=39）なのか。Ｄ 25 を足せば（25+9=34）34 日で 39 日よりも最小になるのに」と発問した。

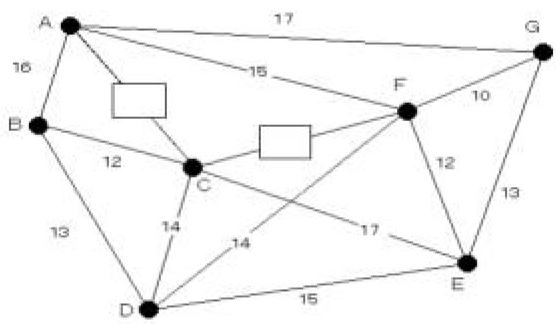
反論があったことで、Ｊ 49 日とＫ 39 日というグラフ上の数値だけで判断するではなく、作業の終了という現実を踏まえた見方や考え方をより深く促すことができた。

（３）事例３：雪かき問題（最小全域木）
（単元 10 時間目：最小全域木発見の手順）

問題：（雪かきの写真から話を起こし）

これからまた雪かきの季節がやってきます。

下図は７軒の家(A-G)の配置と雪かきにかかる時間(分)を示しています。どの家からも他の家に行けるように雪かきをしたい。どうすればよいでしょう。



①全体議論の場面（問題把握）

問題文の問いについては、「どうすれば早く終わるでしょう」「どの道を選べばよいでしょう」など、クラスごとに変えて試行錯誤してみた。

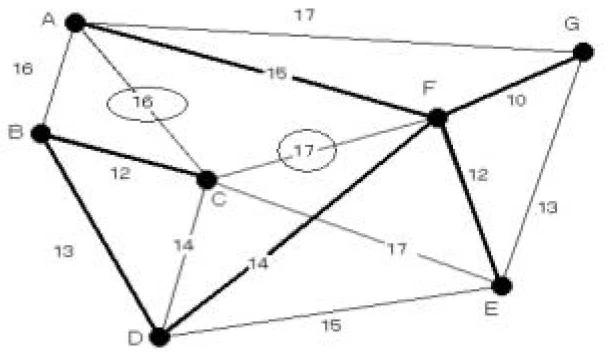
しかし「重機でやればよい」「人が多ければよい」などに話題がそれてしまったため、あえて問題のような問いにし、雪かきの写真から生徒との会話を起こし、やりとりをする中で、問いの意味を理解できないかと考えた。

会話の中では、写真がアイスホッケーの試合に見えるという発言もあったが、１問目を解決していく中で、１周するような経路でなくてもよいことや他の家を経由していても、すべての家がつながっていればよいことなどを確認していった。

また図の□については、数値をすべて与えてしまった授業では、こちらの問いの意味を理解しないまま取り組みはじめる生徒がいたため、理解で

きたところで□にあてはまる数値を与えることにした。

②活動と議論の場面



ア．個人追究

生徒たちは思いつく辺を選んでいき自分なりに最短経路の答えを得ていった。それらを発表させ合計時間を比べることで選んだ経路が本当に最短時間になっているかを確認した。

すると最短時間 76 分という答えに対して、そうでない生徒たちが驚き、疑問や不満を持って再び取り組みはじめた。そして次のような意識をもって生徒たちに操作的活動への意欲を喚起させることができた。

ａ．どの道を選ぶと 76 分になるのか。
　自分とどこがちがうのか。

ｂ．もっと早く見つけたい。
　方法（アルゴリズム）はあるのか。

イ．グループごとの追究

その後、正解している生徒たちを指名して黒板で説明をさせたが、その説明がまだ曖昧だったため、近くの友達と説明しあう場面を設けた。互いの答えを見比べ説明を聞く中で、自分の考えを修正し新たな答えと説明の言葉を獲得していった。

ある生徒は小さい数字を選べばよいと考えて、小さい順にすべての数字を選んでいったことを修正した。つまり 10,12,13,…の辺をすべてつないでいった結果△ EFG の３辺を選び閉路をつくっていたため、最短時間が 76 分を超えてしまっていた。またある生徒はどの段階ですべての点がつながったのかが分からず、辺 AB など余計な辺をつなげてしまっていたことに気づくことができた。

ウ．クラス全体での追究

最短時間とその経路が確認できたところで、全体に２つの質問した。

c．なぜ閉路をつくってはいけないのか

d．早く見つける方法はあるのか

改めてクラス全体に対して黒板で説明させたが、それまでお互いに説明したり確認し合ったことで前よりも自信を持って発言することができた。そして以下のことを全体でまとめることができた。

c．については、△ EFG を例にあげ２辺だけでも３軒にたどり着けるから、閉路にする必要がないこと。

d．については、小さい数値から選んでいくが c．のように閉路に注意すること。各点から少なくとも１本でも辺が出ていればどこかにつながっていくから、２本目以降は気をつけること。

③全体議論の場面（他の場面への適応）

またこの考え方が使えるような現実場面を生徒たちに聞いたところ、「新聞配達の最短ルートを見つけるとき」という発言があった。

雪かきの作業する距離と新聞配達で歩く距離の区別がついていないようであった。雪かきの経路をあてはめると、新聞配達では同じ道を往復することが多くなり、かえって遠回りになってしまうことがある。そして以下のことを伝えて授業を終えた。

e．これまでやってきたグラフとはちがうこと
　つまり、（単語を暗記する必要はないが）オイラー経路やハミルトン経路ではなく、最小全域木という経路であること

f．この見方や考え方が適応できる場面としては、災害時に最優先に復旧する道路や存続させる赤字ローカル線の選び方などがあること

６．複数教員の授業と生徒アンケートの比較

単元指導の前後で生徒の数学に対する意識の変化を調査した。*2

調査項目は、指導前が次の８項目であり、指導後は９項目目を追加した。選択肢は「強くそう思う」「そう思う」「そう思わない」「まったくそう思わない」の４選択肢である。

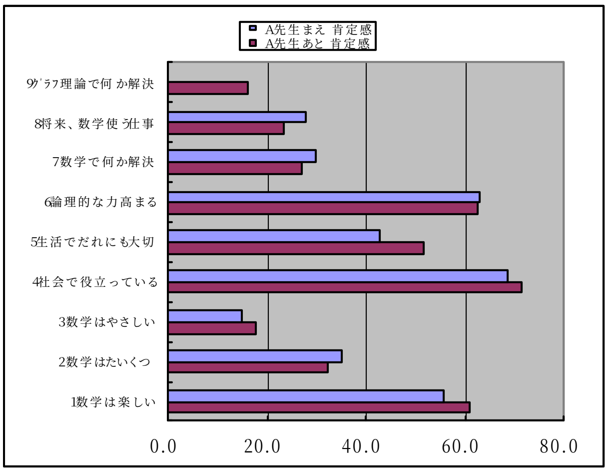
（１）数学の勉強は楽しい（２）数学は、たいくつだ（３）数学は、やさしい教科である。（４）数学は、社会で役立っている（５）数学は、生活

の中でだれにも大切だ（6）数学を学ぶと、論理的に考える力が高まる（7）数学を使って何か解決してみたい（8）将来、数学を使う事が含まれる仕事をしたい（9）グラフ理論を使って何か解決してみたい。

集計方法であるが、今回は３名の教員（A先生, K先生, Y先生）で指導にあたったので、それぞれの授業者ごとに集計している。

グラフは選択肢の「強くそう思う」「そう思う」を「肯定感」として１つにまとめ、単元指導の前後で比較できるようにした。

（1）A先生の授業について



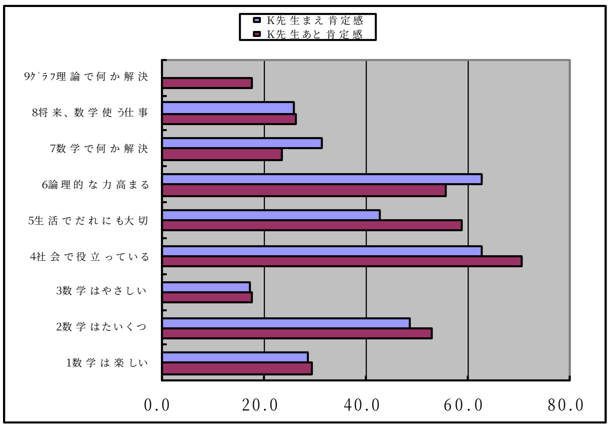
肯定感（強くそう思う＋そう思う）	1数学は楽しい	2数学はたいくつ	3数学はやさしい	4社会で役立っている	5生活でだれにも大切	6論理的な力高まる	7数学で何か解決	8将来、数学使う仕事	9ｸﾞﾗﾌ理論で何か解決
A先生まえ54名	30	19	8	37	23	34	16	15	0
（%）	55.6	35.2	14.8	68.5	42.6	63.0	29.6	27.8	0.0
A先生あと56名	34	18	10	40	29	35	15	13	9
（%）	60.7	32.1	17.9	71.4	51.8	62.5	26.8	23.2	16.1

教員経験１７年であり、生徒とのやりとりはとても慣れているが、グラフ理論を扱ったことは初めてであった。

学習プリントの内容はよく指導していただいたが、そこから他の場面に適応させたり、生徒に似た問題を考えさせるなど、話題の発展や関連づけなどの機会があまりなかったという反省がある。

A先生のアンケート結果	A先生の授業からの考察 指導した生徒合計５６名 （１クラス＋0.5クラス）
数学を楽しいと感じたり、社会で役立ち、だれにも大切だという認識が増している。	A先生は生徒との会話も多く、生徒をうまく動かし乗せていく授業を展開していた。先生－生徒間、生徒－生徒間での議論や活動を入れやすいというグラフ理論のよさをよく活かしていたと思う。
項目６～８で自分が将来にわたって数学を使っていくことには否定的である。 また項目７と９を比較すると何か解決することに対して、グラフ理論を使おうとする生徒が、数学を使おうとする生徒よりも少ない。	課題説明は十分だったと思うが、まだ問題解決の道具としてグラフ理論が定着していないのかも知れない。同じ見方や考え方を自分の生活にどう活かせるのかといった話題の広め方が十分されればよかったかも知れない。 事例２：家を建てる最短日数（単元９時限目）の問題においては、単に有向グラフの見方と計算方法だけを伝えるのではなく、「大工さんは１つの仕事に対して総額の給料をもらうので、こうすることで時給を増やせる」などと扱うことで有用性への認識はより高まると思う。

（2）K先生の授業について



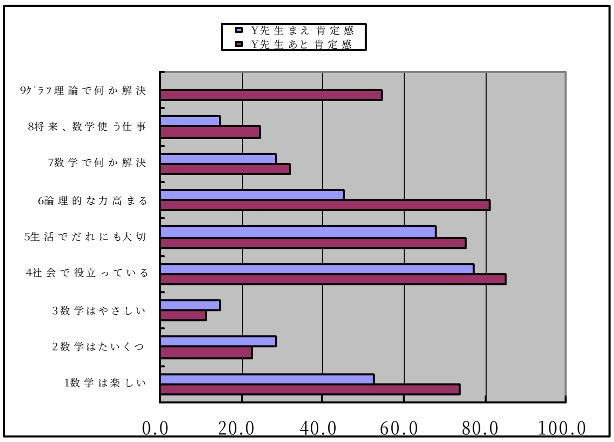
肯定感（強くそう思う＋そう思う）	1数学は楽しい	2数学はたいくつ	3数学はやさしい	4社会で役立っている	5生活でだれにも大切	6論理的な力高まる	7数学で何か解決	8将来、数学使う仕事	9ｸﾞﾗﾌ理論で何か解決
K先生まえ35名	10	17	6	22	15	22	11	9	0
（%）	28.6	48.6	17.1	62.9	42.9	62.9	31.4	25.7	0.0
K先生あと34名	10	18	6	24	20	19	8	9	6
（%）	29.4	52.9	17.6	70.6	58.8	55.9	23.5	26.5	17.6

教員経験２年であり、正しく知識を伝えることがまず重視されていたが、ともすると学習プリントの内容を伝達するだけになりがちだった。

なかなか生徒とのやりとりが十分実現できなかったという反省がある。

K先生の アンケート結果	K先生の授業からの考察 指導した生徒合計３４名 (0.5 クラス＋0.5 クラス)
社会で役立つだれにも大切は単元後大きく伸びている。	この教材がそれだけ生徒に有用性を訴える力を持っているということだろう。身近な事例を数多く取り上げたことがよかったかも知れない。
楽しいが３０%で、たいくつは過半数以上あった。しかし単元後も改善できなかった。 論理的な力や数学で何か解決は単元後に減ってしまっている。	クラスやグループで議論する場面が少なかった。問題の解説はしっかりされていた、説明を一方的に聞くことが多く、自ら数学を使って説明する経験が少なかった。そのため興味はあるがなかなか自信をもって他の問題も解いていこうという意欲にはつながっていないのではないだろうか。

（３）Y先生の授業について



肯定感（強くそう思う＋そう思う）	1数学は楽しい	2数学はたいくつ	3数学はやさしい	4社会で役立っている	5生活でだれにも大切	6論理的な力高まる	7数学で何か解決	8将来、数学使う仕事	9ｸﾞﾗﾌ理論で何か解決
Y先生まえ53名	28	15	8	41	36	24	15	8	0
(%)	52.8	28.3	15.1	77.4	67.9	45.3	28.3	15.1	0.0
Y先生あと53名	39	12	6	45	40	43	17	13	29
(%)	73.6	22.6	11.3	84.9	75.5	81.1	32.1	24.5	54.7

教員経験１５年である。活動や議論の場面をより多く設定しようと心掛けた。事例１：握手問題ではグループで実際に握手をさせることも初めてでやってみた。また学習プリントの内容だけでなく、そこから関連する話題に広げることにも時間をかけたが、勢い脱線することもたびたびあった。

Y先生の アンケート結果	Y先生の授業からの考察 指導した生徒合計５３名 （１クラス＋0.5クラス）
楽しいやたいくつは、さらに改善されたが、やさしいが伸びていない。 論理的な力はよく増えている。	事例１：握手問題（単元６時限目）では、実際に６人で握手させて問題の意味と解決の糸口を考えさせた。グループごとに議論したあと、全体で議論し説明もさせた。 活動を入れたり全体での議論の前にグループ議論の段階を踏んだことで、自分の考えにより自信をもって発言できるようになった。
将来数学が増え、グラフ理論を使って解決が半数以上いた。数学を使っても伸びている。	グラフ理論を学習することで、数学への好感度もあがったことは喜ばしい。 行列など既存の内容にも接続していったことなどが理由だろうか。

７．活動や議論を中心とした授業で生徒が変わる

本研究ではグラフ理論が高校に導入された場合を想定して、そのときの有効な授業方法を検討してきた。そして得られた知見としては、「活動や議論を中心にした授業を行うべきだ」ということである。

グラフ理論の指導における「活動」とは、示された解法パターンにあてはめて問題を反復練習することではない。与えられた問題に対して、試行錯誤を繰り返しながら自分の言葉をもち、それに信念をもつまでの過程であると考えている。

また「議論」や「生徒とのやりとり」とは、授業中に指名された生徒が発言することではない。生徒同士がグループやクラスの中で、信念をもと

に自分の言葉で話し、自分も相手も互いに理解できるようになっていく過程であると考えている。

同じ学習内容であっても、こうした活動や議論を上手に積み重ねることで、生徒たちは少しずつ数学への好感度を上げ、有用性を実感していってくれることが分かった。また将来的に数学を使っていこうとする姿勢や態度にもつながっていくのである。これらはより授業者の意識が重要になってくることを示しているのではないだろうか。

8．まとめ

これまでの高校数学ではこうした活動や議論を中心にした授業が十分に行われてきただろうか。

離散数学の導入においては内容の選別も重要だが、「現場」でどのような授業が行われているのかが問われることになってきそうだ。

なぜなら同じ学習内容であっても各教員の授業方法によっては、結果にかなりの差が出てしまうからだ。

今回実践した３名の教員だけでなく、本校数学科ではこうした差が出てくる原因を振り返り、普段の授業から改善を図っていく必要があると考えている。その理由は、急に活動や議論をさせようとしてもなかなかすぐにはできない体質に、教員も生徒もなってしまっていることを気がついたからである。

付記

なお本研究は、日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究(B)「高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の研究」(研究代表者:長崎栄三，課題番号 16300258,平成 16 年度～平成 18 年度)による成果の一部である。

また今回の授業を続けるに当たり、本校職員・保護者及び本研究会メンバーの方々から、貴重なご助言とご協力を賜りました。

この場を借りて厚く御礼申し上げます。

注

*1 本稿は、日本数学教育学会会誌への投稿論文「離散数学の高等学校への導入に関する研究－活動や議論を中心とした「グラフ理論」の授業で生徒が変わる－」に加筆修正を加えたものである。(2006.11.28 現在査読中)

*2 調査項目については、TIMSS（1995,2000 国際数学・理科教育調査）や高等学校科学教育調査(2000「我が国の高等学校３年生の数学・理科の学力－高等学校科学教育調査報告書－」）を参考にした。

引用・参考文献

秋山仁(1999)Newsstation ８月１３日放送の問題 http://www.tv-asahi.co.jp/n-station/others/akiyama/frmain.html

Arthur F.Coxford et a l(1998) "Implementing the Core-Plus Mathematics Curriculum". McGraw-Hill.1998

長尾篤志・景山三平・長崎栄三（2006)『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』，国立教育政策研究所

長尾篤志・長崎栄三（2006)「高校数学への離散数学の導入に関する基本的な考え方」，長尾篤志・景山三平・長崎栄三『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』，国立教育政策研究所, pp.3-9

西村圭一(2006)「アメリカの高等学校への離散数学の導入例－ Pollak の考え，CPMP －」，長尾篤志・景山三平・長崎栄三『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』，国立教育政策研究所, pp.136-153

横澤克彦(2006)「「グラフ理論」の単元による指導－活動や議論を中心とした授業への転換を目指して－」，長尾篤志・景山三平・長崎栄三『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』，国立教育政策研究所, pp.215-230