

何でいきなり $y = \sin$ なんですか？

- グラフから現象（振り子の等時性）を探究する -

長野県上田千曲高等学校 横澤克彦

1. 教材と授業に対する問題意識

(1) 教材に対する問題意識

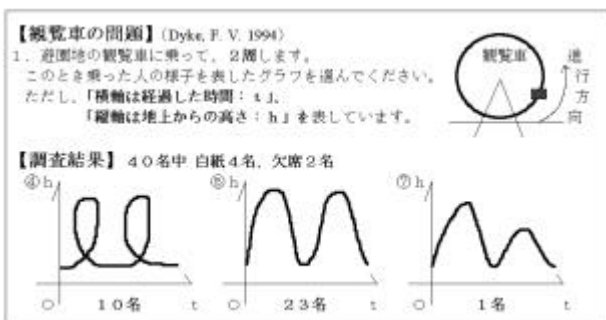
現実場面との関わりについてほとんど触れられていない

教科書では、周期関数の代表例として三角関数が扱われている。振動（ばね・音など）やバイオリズムなどのように周期性をもつ自然現象や社会的事象はとても多く、それらの分析や追究において、三角関数はとても大きな役割を果たしてきたと考えられる。

しかし教科書での扱いは定理や公式の羅列になっており、 $y = \sin$ のグラフだけをとり、その振幅や周期が現実場面において何を表現しているのかは、これまでもあまり触れられてこなかったように思われる。

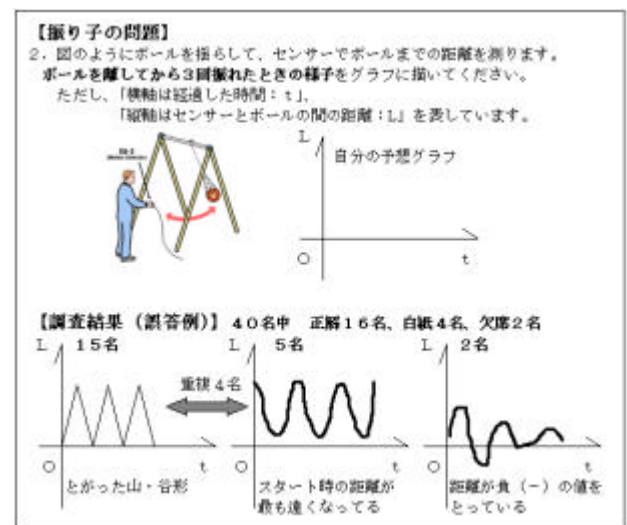
- $y(t)$ グラフに対する生徒の認識が希薄である

三角関数のグラフでは、それまでの $x - y$ 軸によるグラフから、 $-y$ 軸のグラフに見方・考え方を変える必要がある。しかし調査から、その認識を変えることは容易ではないことが分かった。



三角関数のグラフで、横軸を正の回転方向だけで見えていくならば、それは時間の経過を横軸 t にとったときの見方と一致する。そこで調査では上のような問題（観覧車の問題、）をつくった。

その結果、生徒たちは観覧車の動きをそのままグラフに表現する傾向があり、時間が戻るグラフを描いていることに疑問を感じていない生徒の多いことが分かった（）。そこでセンサーを使い、「グラフを歩こう」という課題を与え、時間軸に対する認識の改善を図った。



しかし振り子の問題では、周期性を持つ様子がジグザグのグラフになることを表現できるようにはなったものの、その形がとがった山・谷の形をしている生徒が多く、まだ速度についての認識が不十分であることが分かった。

つまり、振り子の往復運動はゆっくり行って帰ってくることを考えると、滑らかな山・谷になるはずである。とがった山・谷のグラフを現象として再現すると、ボールが壁にぶつかってすぐに跳ね返ってくるような現象なのである。

接線の傾きについては微分での学習領域であるが、徐々に減速する様子がボールの様子を背景にしてグラフから読みとれていくことを期待したい。

(2) センサーを使った授業に対する問題意識 あてずっぽでも答えは出せてしまう

センサーを使った振り子の授業例はこれまでもある。

ここでは「1秒振り子」を作ってみようなどが、主な課題となっている。式やグラフを使って、1秒振り子の条件を探り、検証実験を繰り返すような探究活動の実現を目指している。しかし少しずつおもりの位置をずらして調べていく方が早かったりする。生徒によっては数学は遠回りだし、あてずっぽの方が早いという感想が残ってしまいがちである。

こうした探究活動は、本当に式やグラフの有用性を実感するまでに至っているのだろうか。

物理の学習に陥り、数学科としての追究を見失っていないか

このようなセンサーの使い方を見ていると、現象（物理）を理解することが目標になっていて、グラフ（数学）はそのための方法という位置づけになってしまっているように思われる。しかしそれは数学科の目指す指導とは異なっているのではないだろうか。

やはり数学科では、式・グラフ・表など（数学）をより深く理解する授業となるべきであり、グラフの見方やグラフを通した考え方の習得をより豊かにするために、現象（物理）も利用するという方向で教材を検討するべきなのではないかと考える。

2. 授業の構想

(1) 生徒観

生活福祉科は女子が多く、素朴で素直な生徒が多い。公式をそのまま使った問題はよくできるが、問題に合わせて公式を変形したり、導びいたりすることが必要になると、手が止まってしまう。

新しい発想や思考の切り替えが難しく、また新しい環境への適応などには時間がかかる。

今回のセンサーを使った授業に対しても、なかなか新しい操作が覚えられなかったり、既習の機能を使いこなせない生徒が多かった。

しかし学習に対する意欲は高いので、丁寧に時間をかけて指導していきたい。

(2) 研究授業の構想

グラフの式化（グラフの式を探究する活動）

以前、グラフ電卓の有効な使い方として、グラフの式化を提案した。（横澤 1994）

式を入力しなければ、グラフを描かないグラフ電卓の特性を利用したものである。

発問はまず黒板に2次関数のグラフを描き、「これと同じグラフをグラフ電卓に描かせなさい。」というものである。

1つの目標（グラフ）に対して、生徒たちは自分の予想（式）を試していく。一度ではうまくいかないの、それを何度も修正することになる。

この探究活動のよさは、自らの予想を修正するところにある。他人の意見や先生の取り上げた例を修正するのではないので、より納得のいく形で探究を終えることができる。

グラフの現象化（グラフの現象を探究する活動）

【従来】	現象が目標になっているときは、その現象があてずっぽであって
方法：グラフ（数学）	も再現できてしまえば、
目標：現象（物理）	それで終わってしまう。

例えば1秒振り子になっていることの説明は、結果を見ることで終わってしまうし、さらにはセンサーがなくてもつくることができる。

【今回】	しかしグラフが目標
目標：グラフ（数学）	の場合は、与えられた
方法：現象（物理）	グラフが再現するために、ある特定の操作と説明が必要になる。

またセンサーを使う必要性も生まれる。

目標が1つのグラフに絞られていることは、授業の発散を抑え、生徒の探究活動のねらいを数学的活動に定めることができる。

従来までのセンサーを使った振り子の授業

授業課題：1秒振り子を作れ

探究活動：データをとり、法則性を見つけ、

式・グラフ・表から、1秒振り子の条件を探り、検証実験を繰り返す。

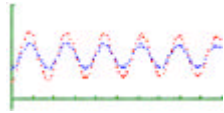
生徒の予想：あてずっぽも可能

今回の改善案

授業課題：このグラフを作れ。

探究活動：幾つかのグラフの

特徴を手がかりに、振り子の条件を変えながら検証実験を繰り返す。



生徒の予想：

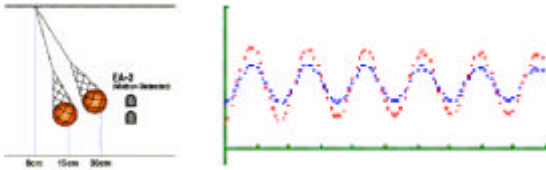
現象 糸の長さ（ボールの位置）を変える

現象 ボールの大きさを変える

現象 ボールの振り幅を変える

3. 教材研究

http://www.casio.co.jp/edu/classroom/high/pdf_files/makishita_pendulum2.pdf からの図



振り子の糸の長さ：L、周期：T、
重力加速度：gとすると

$$T = 2 \pi \sqrt{L / g}$$

つまり、L - Tの関係は、定数：aとすると

$$T = a \sqrt{L}$$

したがって、今回の等時性（周期：Tが一定）であるための条件は、“おもりの重さ”や“おもりの降り幅”には関係なく、糸の長さ（おもりの位置）：Lのみに依存することが分かる。

【注】

この授業は、SPP事業（代表：飯田洋市（諏訪東京理科大学））の一環として行われました。

SPP（スーパー・サイエンス・パートナーシッププログラム）事業とは、大学、研究機関等の人材、施設、設備等を、学校における科学技術・理科、数学教育に活用する取組への支援と連携教育に関連する調査研究を通じて、連携のあり方を検討することを目的としています。

【参考文献】

Dyke, F. V. (1994). Relating to graphs in

introductory Algebra. Mathematics Teacher, 87 (6), pp427-439.

横澤克彦(1994)「グラフ電卓を用いた関数指導 - 『グラフの式化』を重視して - 」, 日本数学会教育学会誌第76回総会特集号、p254

牧下英世(2004)「振り子の周期と時間の関係を明らかにしよう - ガリレオ・ガリレイの実験を通して - 」

http://www.casio.co.jp/edu/classroom/high/pdf_files/makishita_pendulum2.pdf

【資料】

